PRÉVISION DANS UN MODÈLE D'INTERDÉPENDANCE (J1, J9)
(18 / 06 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

Le modèle d'interdépendance fournit un exemple privilégié de mise en oeuvre des méthodes de **prévision** de type conditionnel : physique (modèles météorologiques), biologie (modèles cellulaires), écologie (modèles de prédation), sociologie (modèles économiques), etc (cf **prévision conditionnelle**).

(i) On considère un **modèle d'interdépendance** (non linéaire) liant un vecteur η constitué de G **variables endogènes** η_g à un vecteur ξ constitué de K **variables exogènes** ξ_k selon une relation (aléatoire) mise sous forme explicite (cf **forme réduite**) et sans **perturbation aléatoire**, et écrite dans l'**espace des variables** :

(1) $\eta = \varphi(\xi)$, ie $\eta_g = \varphi_g(\xi_1, ..., \xi_K)$, $\forall g \in N_G^*$.

On dispose de N observations $((X_1, Y_1), ..., (X_N, Y_N))$ de (ξ, η), les observations X_n de ξ constituant une (N,K)-**matrice** X et celles Y_n de η une (N,G)-matrice Y. On note X_n les vecteurs lignes de X et Y_n ceux de Y. Par suite, (1) s'écrit, pour chaque observation n :

(2) $Y_n' = \varphi(X_n)$, $\forall n \in N_N^*$.

L'ensemble des relations (2) s'écrit, sous forme condensée, dans l'**espace des observations** (X, Y) :

(3) $Y = \Phi(X)$.

(ii) On suppose que la relation Φ est estimée à l'aide des observations (X, Y) selon une fonction $\Phi^\#$, ie que φ est estimée par une certaine fonction $\varphi^\#$.

On appelle alors :

(a) **prévision (ponctuelle)** de la variable endogène η (conditionnellement à ξ_0) le vecteur $\eta_0^\# = \Phi^\#(\xi_0)$, où ξ_0 est une valeur fixée a priori de la variable exogène ξ) ;

(b) **erreur de prévision** (conditionnellement à ξ_0) la va $\delta_0 = \eta_0^\# - \eta_0 = \varphi^\#(\xi_0) - \varphi(\xi_0)$. Si la notion d'**espérance mathématique** est définie et si φ est estimée sans **biais** par $\varphi^\#$, l'**erreur** de prévision est nulle en moyenne, ie $E\,\delta_0 = 0$;

(c) **prévision (ensembliste)** de la variable endogène η (conditionnellement à B_0) l'image $C^\#_0 = \varphi^\#(B_0)$, où B_0 est un ensemble donné de valeurs prises par ξ_0 .

Des définitions analogues s'appliquent à $(\Phi, \Phi^\#)$ et au modèle (3).

(iii) En pratique, le modèle est souvent linéaire et les **indices** $n \in N_T^*$ représentent le « **temps** » (ici discret) $t \in N_T^*$. Dans ce cas, chaque équation (scalaire) ($G = 1$) de la forme réduite peut se présenter sous forme d'un **modèle de régression linéaire** multiple :

(4) $\eta = \Sigma_{k=1}^{K} b_k \xi_k + \varepsilon$,

« observé » dans $\mathbf{R}^T$ selon :

(5) $y = \Sigma_{k=1}^{K} b_k x_k + u = X b + u$ (équation dans $\mathbf{R}^T$).

Toute méthode d'estimation de b (eg la **méthode des mco**) conduit au calcul d'un **estimateur** $b^\#$ de b, ainsi qu'à la « **relation estimée** » : $y^\# = \Sigma_{k=1}^{K} b_k^\# \xi_k$.

Si la liste $\xi = (\xi_1 ,..., \xi_K)$ prend la valeur $\xi_0 = (\xi_{01} ,..., \xi_{0K})$, la prévision de η associée à ξ_0 est donc $\eta_0^\# = (b^\#)' \xi_0$ (cf **prévision des moindres carrés généralisés**, **prévision des moindres carrés ordinaires**). On peut alors en étudier les propriétés probabilistes ou statistiques.