

PRÉVISION DES MOINDRES CARRÉS D'UN PROCESSUS (H3, N6)

(15 / 12 / 2019, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2019)

Un objectif de la **théorie des processus** consiste à prévoir, connaissant le « passé » d'un processus ou de l'une de ses **trajectoires**, l'« avenir » ou le « futur » de celui-ci ou de celle-ci, ie son « cheminement » après à l'instant présent. On donne ci-après un exemple simple d'un tel problème (cf **prévision d'un processus**).

(i) Soit $X = (X_t)_{t \in T}$ un processus complexe scalaire, en **temps** discret (eg $T = \mathbf{Z}$), $N \in \bar{\mathbf{N}}$, avec $\bar{\mathbf{N}} = \mathbf{N} \cup \{+\infty\}$, et $H \in \mathbf{N}^*$. On suppose que X est un **processus stationnaire en covariance**.

On appelle **problème de prévision des moindres carrés (non linéaires)**, ou **problème de prédiction des moindres carrés (non linéaires)**, à l'horizon H (ou sur la période H) de X la recherche d'une fonction mesurable $f : \mathbf{C}^N \mapsto \mathbf{C}$ tq (cf **application mesurable**) :

$$(1) \quad q(f) = E |X_{t+H} - f(X_t, X_{t-1}, \dots, X_{t-N+1})|^2$$

soit minimum, où l'on suppose que $q(f) < +\infty$.

On appelle alors **prévision des moindres carrés (non linéaires)**, ou **prédicteur des moindres carrés (non linéaires)**, de X la solution $f^\wedge$ du problème précédent. Celle-ci existe, est unique, et n'est autre que l'**espérance conditionnelle** :

$$(2) \quad f^\wedge(X_t, X_{t-1}, \dots, X_{t-N+1}) = E(X_{t+H} / X_t, X_{t-1}, \dots, X_{t-N+1}).$$

L'entier H est appelé **horizon de la prévision** du processus X et X_{t+H} est appelé **prévision à (l')horizon H** , ou **prédiction à (l')horizon H** , de X .

Comme $\bar{\mathbf{N}} = \mathbf{N} \cup \{+\infty\}$, on peut supposer que $N = +\infty$. Dans ce cas, on parle de **prévision fondée sur le passé (infini)** jusqu'à l'instant t de X .

(ii) Lorsque f est linéaire :

$$(3) \quad f(X_t, X_{t-1}, \dots, X_{t-N+1}) = \sum_{\tau=1}^N b_\tau \cdot X_{t-\tau+1},$$

on dit que $f^\wedge$ est la **prévision des moindres carrés linéaires** de X . Dans ce cas, on montre que, lorsque $N = +\infty$:

$$(4) \quad 0 \leq \sigma_1^2 \leq \sigma_2^2 \leq \dots,$$

où σ_H^2 désigne l'**erreur quadratique moyenne de prévision**, ie (cf **écart quadratique moyen**), ie :

$$(5) \quad \sigma_H^2 = E |X_{t+H} - f^\wedge(X_t, X_{t-1}, \dots)|^2.$$

On dit que X est :

(a) un **processus régulier** si $\sigma_1^2 > 0$;

(b) un **processus non régulier**, ou parfois un **processus déterministe**, si $\sigma_1^2 = 0$.

(iii) Les résultats et la terminologie s'étendent, avec certaines adaptations (notamment l'hypothèse de continuité en moyenne quadratique de X), au cas d'un processus X en temps continu ($T = \mathbf{R}$) ou à celui d'un processus X vectoriel (cf **processus continu dans L^p** , avec $p = 2$).