

PRINCIPE DE RÉFLÉCHISSEMENT (N2)

(21 / 01 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

Le **principe de réflexion** est une méthode utilisée pour démontrer certaines égalités de la **théorie des processus**, eg pour simplifier l'étude d'une **promenade aléatoire**.

(i) Soit $X = \{(\Omega, \mathcal{F}, P), (\mathcal{X}, \mathcal{B}), (X_t)_{t \in T}\}$ un **processus stochastique** réel scalaire (ie $(\mathcal{X}, \mathcal{B}) = (\mathbf{R}, \mathcal{B}_{\mathbf{R}})$), en **temps** continu ($T = \mathbf{R}_+$). On suppose que X est un **processus à accroissements indépendants** et que ses **trajectoires** $t \mapsto X_t(\omega)$ (où $\omega \in \Omega$) sont continues en probabilité sur T (cf **processus continu en probabilité**). Etant donné $x \in \mathbf{R}$, on définit, pour tout segment $S = [0, S] \subset T$, la **variable aléatoire** $\tau : \Omega \mapsto S$ selon :

$$(1) \quad \tau(\omega) = \inf \{s \in S : X_s(\omega) - X_0(\omega) = x\}.$$

Comme les accroissements $X_s - X_0$ sont, $\forall s \geq \tau(\omega)$, indépendants des accroissements $X_s - X_0$, $\forall s < \tau(\omega)$, on ne change pas (**principe de réflexion**) la nature (ie les propriétés probabilistes) de X en procédant au « **réflexion** » de la trajectoire $s \mapsto X_s(\omega) - X_0(\omega)$ pr à la droite Δ_x d'équation $s \mapsto f(s) = x$, ie en remplaçant, $\forall s \geq \tau(\omega)$, la portion de trajectoire $s \mapsto X_s(\omega) - X_0(\omega)$ par la portion de trajectoire symétrique de la précédente pr à Δ_x .

Si l'on définit les événements emboîtés suivants :

$$A_x = \{\omega \in \Omega : \sup_{s \in S} X_s - X_0 \geq x\},$$

$$(2) \quad B_x = \{\omega \in \Omega : X_S - X_0 \geq x\} \subset A_x,$$

$$C_x = \{\omega \in \Omega : X_S - X_0 = x\} \subset B_x,$$

le **principe de réflexion** (D. ANDRÉ) se traduit par la relation probabiliste :

$$(3) \quad P(A_x \cap B_x^c) = P(A_x \cap (B_x \setminus C_x)) = P(B_x \setminus C_x).$$

Par suite, comme $P(A_x \cap B_x) = P(B_x)$, et du fait de la continuité des trajectoires, on obtient (par addition membre à membre) :

$$(4) \quad P(A_x) = P(B_x) + P(B_x \setminus C_x) = 2 \cdot P(B_x).$$

(ii) Soit X un **processus du mouvement brownien** (avec $T = \mathbf{R}_+$) et $Y = (Y_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ un processus réel scalaire qui est une **suite iid** selon une **loi symétrique**. On pose $x > 0$, $\varepsilon > 0$ et $Z_N = \sum_{n=1}^N Y_n$. Alors :

(a) l'inégalité $P(h_N \max \sum_{n=1}^N Z_n \geq x) \leq 2 \cdot P(Z_N \geq x)$ implique :

$$(5) \quad P(\sup_{t \leq s} (X_t - X_0) \geq x) \leq 2 \cdot P(X_s - X_0 \geq x), \quad \forall s \in T.$$

Donc X est presque sûrement à trajectoires continues.

(b) de même, l'inégalité $P(Z_N) + 2 \cdot (1 - \sum_{n=1}^N P(Y_n \leq e)) \leq (1/2) P(h_N \max_{n=1}^N Z_n \geq x)$ implique :

$$(6) \quad P(\sup_{t \leq s} (X_t - X_0) \geq x) = 2 \cdot P(X_s - X_0 \geq x);$$

(c) par suite, on a encore, pour toute trajectoire continue de X (et avec les mêmes notations qu'en (i)) :

$$(7) \quad \begin{aligned} P(A_x \cap B_x) &= P(B_x), \\ P(A_x \cap B_x^c) &= P(A_x \cap (B_x \setminus C_x)) = P(B_x \setminus C_x). \end{aligned}$$

Si $\tau(\omega)$ est le **premier instant** t pour lequel $X_t - X_0 = x$, les variations de X après $\tau(\omega)$ sont indépendantes de celles réalisées avant $\tau(\omega)$ et leur signe est équadistribué. Autrement dit, dès que $t > \tau(\omega)$, les probabilités sont invariantes lorsqu'on procède au **réfléchissement** de X par à la ligne Δ_x d'équation $y = f(t) = x$.

(iii) Dans le contexte d'une **promenade aléatoire**, on considère un N -uple (ou **suite**) $X = (X_1, \dots, X_N)' \in \{-1, +1\}^N$ tq $N = N^+ + N^-$, où $N^+ \in N_N^* = \{1, \dots, N\}$ représente le nombre d'**indices** i tq $X_i = +1$ et N^- représente le nombre d'indices j tq $X_j = -1$, ie :

$$(8) \quad \begin{aligned} N^+ &= \text{Card} \{i \in N_N^* : X_i = 1\}, \\ N^- &= \text{Card} \{j \in N_N^* : X_j = -1\}. \end{aligned}$$

On pose :

$$(9) \quad \begin{aligned} S_0 &= 0, \\ S_\alpha &= \sum_{i=1}^\alpha X_i, \quad \forall \alpha \in \{1, \dots, N-1\}, \\ S_n &= N^+ - N^-. \end{aligned}$$

Autrement dit, la différence $S_\alpha = \alpha^+ - \alpha^-$, dans laquelle $\alpha^+ = \text{Card} \{i \in N_\alpha^* : X_i = +1\}$ et $\alpha^- = \text{Card} \{j \in N_\alpha^* : X_j = -1\}$, représente la différence entre le nombre de termes égaux à $+1$ et le nombre de termes égaux à -1 figurant dans les α premières coordonnées. On a ainsi :

$$(10) \quad \Delta S_\alpha = S_\alpha - S_{\alpha-1} = X_\alpha \in \{-1, +1\}.$$

On appelle :

(a) **chemin polygonal**, ou **ligne polygonale**, associé(e) à la suite X la fonction affine par morceaux passant par les points du **graphe** de coordonnées $(X_\alpha, S_\alpha)_{\alpha=0,1,\dots,N}$.

(b) **chemin de longueur n allant de l'origine $(0, 0)$ à un point $(n, y) \in \mathbf{N}^* \times \mathbf{N}^*$** le graphe de toute fonction affine par morceaux passant par les points (α, S_α) (où $\alpha \in \mathbf{N}_n^*$) et tq $S_n = y$. Il existe donc 2^n tels chemins.

Par suite :

$$\begin{aligned} n &= n^+ + n^-, \\ (11) \quad y &= n^+ - n^-. \end{aligned}$$

Il existe $C_n^{n^+} = K(n, y)$ façons d'obtenir n^+ termes X_i égaux à $+1$ dans la suite X . Si les égalités (11) ne sont pas vérifiées par un point donné (n^*, y^*) , on peut poser $K(n^*, y^*) = 0$: dans ce cas, il existe exactement $K(n, y)$ chemins distincts allant de l'origine à n'importe quel point (n, y) .

Le **principe de réfléchissement** s'exprime comme suit. Soit $A = (n, y)$ et $B = (p, z)$ deux points situés sur un chemin et tq $y \in \mathbf{N}^*$, $z \in \mathbf{N}^*$, $n \in \mathbf{N}$, $p \in \mathbf{N}^*$ et $p > n$. On appelle **réfléchissement** du point A par au point $(n, 0)$, ou pr à l'ensemble $\{(n, 0) : n \in \mathbf{N}\}$, le point symétrique $s(A) = (n, -y)$.

On montre que le nombre de chemins allant de A vers B et « touchant » l'ensemble $\{(n, 0) : n \in \mathbf{N}\}$, ou traversant cet ensemble, est égal au nombre de chemins allant de $S(A)$ vers B . Par « **traversée** », on entend l'existence de chemins comportant des points $(q, -t)$ tq $n < q < p$ et $t \in \mathbf{N}^*$.