PROBABILITÉ RÉGULIÈRE (A4, B1)
(25 / 11 / 2019, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2019)

(i) Soit ($\mathcal{X}$, $\mathcal{O}$) un **espace localement compact** et $\mathcal{B}$ = σ($\mathcal{O}$) sa **tribu borélienne**.

On dit qu'une **mesure de probabilité** P définie sur B est une **probabilité régulière** ssi :

(1) $P(B) = \inf_{B \subset U,\, U \in \mathcal{O}} P(U), \qquad \forall B \in \mathcal{B}.$

Si $\mathcal{K}(\mathcal{X})$ désigne l'ensemble des fonctions f : $\mathcal{X} \mapsto \overline{\mathbf{R}}$ continues et à **support** compact, on peut associer, à toute **mesure de RADON** positive u sur $\mathcal{X}$, de masse totale $\sup_{f \in \mathcal{K}(\mathcal{X}),\, f \geq 0} u(f) = 1$, une mesure régulière unique P, définie sur l'**espace mesurable** ($\mathcal{X}$, $\mathcal{B}$) et vérifiant :

(2) $\int f \, dP = u(f), \qquad \forall f \in \mathcal{K}(\mathcal{X})$

(cf **application continue**, **support d'une fonction**, **partie compacte**).

Cette propriété explique que toute probabilité régulière P définie sur $\mathcal{B}$ est aussi appelée **(mesure de) probabilité de RADON**.

(ii) Si ($\mathcal{X}$, $\mathcal{O}$) est un **espace métrisable** (eg $\mathcal{X} = \mathbf{R}^n$ ou $\mathcal{X} = \mathbf{C}^n$), toute probabilité sur $\mathcal{B}$ est régulière. Ceci est vrai, en particulier, si ($\mathcal{X}$, $\mathcal{O}$) est un **espace métrique**.

Autrement dit, $\forall \varepsilon > 0$ et $\forall B \in \mathcal{B}$ (avec $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{O})$), il existe un fermé $F \in \mathcal{F}$ (avec $\mathcal{F} = \{F \subset \mathcal{X} : F^c \in \mathcal{O}\}$) et un **ouvert** $U \in \mathcal{O}$ tq (cf aussi **mesure régulière**) :

(3) $F \subset B \subset U \;\Rightarrow\; P(U \setminus F) < \varepsilon.$