PROBABILITÉ SUBJECTIVE (G3)
(08 / 01 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

Une **probabilité subjective** est une « mesure d'incertitude » relative à des **événements** ou à des **décisions**.

Ce concept clef (L.J. SAVAGE) de la **théorie de la décision** fonde et justifie des **procédures statistiques** basées sur la notion de **probabilité a priori**.

(i) Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un **espace probabilisé**, $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ un **espace probabilisable**, appelé **espace d'état**, et $\xi : \Omega \mapsto \mathcal{X}$ une **va** de **loi** P^{ξ} (image de P par ξ définie sur $\mathcal{B}$). On considère aussi un ensemble de **décisions** (ou résultats, ou encore conséquences) D et l'on appelle **décision**, ou **action**, tout élément $d \in \Delta = D^{\mathcal{X}}$ (ensemble des **applications** de $\mathcal{X}$ dans D). On suppose enfin vérifiés les axiomes suivants, qui traduisent une cohérence entre préférences du **statisticien** :

(a) D est muni d'un **préordre** complet $\prec$, qui induit un préordre sur $\mathcal{B}$;

(b) étant donné $B \in \mathcal{B}$, si l'on a $d'(x) = d''(x)$, $\forall x \in \mathcal{X} \setminus B$, pour deux décisions données d' et d'' (ie si les décisions d' et d'' ont la même conséquence), alors le fait que $d' \prec d''$ ou le fait que $d'' \prec d'$ ne dépend que de $d'(x)$ et $d''(x)$, $\forall x \in B$;

(c) le fait que $d' \prec d''$ ou que $d'' \prec d'$ ne dépend pas des états $x \in \mathcal{X}$ qui se réalisent ;

(d) $\mathcal{X}$ peut être partitionné selon des **partitions** $\Pi_{\mathcal{X}}$ de cardinalité arbitrairement grande, constituées d'**évènements quasi-équivalents**, au sens où il n'existe pas de **suite** finie $(B_\alpha)_{\alpha = 1, \dots, k+1}$ d'éléments $B_\alpha \in \Pi_{\mathcal{X}}$ tq :

(1) $P^{\xi}(\cup_{\alpha=1}^{k+1} B_\alpha) > P^{\xi}(\cup_{\alpha=1}^{k} \{x_\alpha\})$,

pour toute suite d'évènements élémentaires $\{x_1, \dots, x_k\}$.

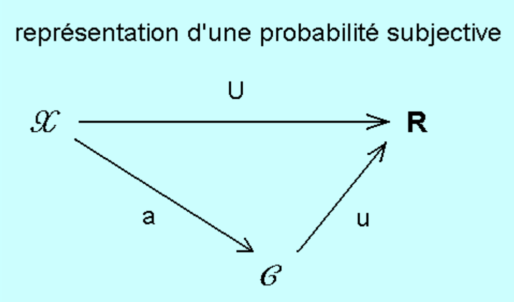
Sous certaines hypothèses, il existe alors une fonction $u : D \mapsto \mathbf{R}$, appelée **fonction d'utilité du statisticien** (cf **fonction d'utilité**), et une **probabilité** Π définie sur $\mathcal{B}_D$ (**tribu de parties** de D) tq le préordre $\prec$ sur D ne soit autre que le préordre induit par l'**espérance mathématique** (calculée avec Π) de l'utilité.

Autrement dit, si l'on pose $U = u \circ d$ et si Π désigne une famille de probabilités définies sur $\mathcal{B}_D$, on a :

(2) $\Pi' \leq \Pi' \Leftrightarrow E_{\Pi'} u \leq E_{\Pi''} u, \forall (\Pi', \Pi') \in \Pi^2$,

ce qui suppose que E_Π u existe, $\forall\ \Pi \in \mathbf{\Pi}$.

On dit alors que P est une **probabilité subjective**. D'où la représentation suivante :



(ii) D est muni d'un préordre qui traduit les préférences du statisticien entre diverses décisions, ou entre leurs diverses conséquences.

Celui-ci possède aussi des préférences entre probabilités définies sur $\mathscr{B}_D$. Autrement dit, si $\mathbf{\Pi}$ est une famille de probabilités sur $\mathscr{B}_D$, alors $\mathbf{\Pi}$ est aussi préordonné.

Le **principe de l'utilité espérée**, ou **principe de l'utilité moyenne**, (de M. ALLAIS) consiste à préférer la probabilité Π tq E_Π u soit maximum.

Dans un cadre bayésien, une probabilité subjective sert souvent de **probabilité a priori**.