

PROBLÈME À UN ÉCHANTILLON (I2)

(20 / 11 / 2019, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2019)

(i) Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ un **modèle statistique**, $\xi : \Omega \mapsto \mathbf{R}$ une **vars (variable parente)** tq $\xi \in L_{\mathbf{R}}^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$, $\forall P \in \mathcal{P}$, et dont l'une des **lois** possibles P^ξ génère un **échantillon iid** $X = (X_1, \dots, X_N)'$.

On appelle **problème à un échantillon** le **problème de test** de l'**hypothèse « nulle »** :

$$(1) \quad H_0 : E \xi = 0.$$

(ii) Le traitement (paramétrique) de ce problème consiste eg à admettre que l'hypothèse de **normalité** $P^\xi = \mathcal{N}_1(\mu, \sigma^2)$ (**loi normale**) est vraie, et à calculer la **statistique de R.A. FISHER** :

$$(2) \quad T_N = \bar{X}_N / (S_N / N^{1/2}) = N^{1/2} \cdot (S_N)^{-1} \cdot \bar{X}_N,$$

où $\bar{X}_N = e_N' X / e_N' e_N$ (**moyenne empirique** de X) et $S_N^2 = (N-1)^{-1} X' P X$ (**variance empirique** « corrigée »), en notant X comme un vecteur colonne de $\mathbf{R}^N$ et P la **matrice de centrage par rapport à la moyenne** $\bar{X}_N$.

Sous l'hypothèse nulle, qui s'écrit ici $H_0 : P^{\xi(0)} = \mathcal{N}_1(0, \sigma^2)$, cette **statistique de test** vérifie la propriété $T_N \sim \mathcal{J}_{N-1}$ (**loi de STUDENT** à $N - 1$ **degrés de liberté**) et permet d'effectuer le **test de FISHER** usuel.

(iii) Un traitement alternatif, non paramétrique, est basé sur le **test de WILCOXON** (cf **test des rangs signés**), qui utilise la statistique de test (corrigée des **rangs multiples**) suivante :

$$(3) \quad W_N = e_N' R / (R' R)^{1/2},$$

dans laquelle $R = (R_1, \dots, R_N)'$ est tq $R_n = (\text{sgn } X_n) \cdot |R_n|$ et $|R| = (|R_1|, \dots, |R_N|)'$ est la **statistique de rang** associée à $|X| = (|X_1|, \dots, |X_N|)'$.

En remplaçant formellement X par R dans (1), on obtient la statistique :

$$(4) \quad V_N = (a_N - b_N W_N^2)^{-1/2} \cdot W_N,$$

dans laquelle $a_N = (e_N' e_N - 1)^{-1} e_N' e_N$ et $b_N = (e_N' e_N - 1)^{-1}$.

Comme V_N est en relation monotone croissante avec W_N , les tests basés sur W_N et ceux basés sur V_N sont équivalents.