PROBLÈME D'ESTIMATION PONCTUELLE (H2)
(21 / 09 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

Pour estimer une **caractéristique légale** ou un **paramètre** d'une **lp**, une méthode ponctuelle utilise un **espace de décision** particulier : l'espace des paramètres du modèle lui-même, ou l'un de ses sous-espaces (cf **estimateur ponctuel**).

(i) Un **problème d'estimation ponctuelle** comporte :

(a) un **modèle statistique** de base $(\Omega, \mathcal{T}, (P_\theta)_{\theta \in \Theta})$, un **espace d'observation** $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ et une **va** (ou une **statistique** : eg un **échantillon**) $X : \Omega \mapsto \mathcal{X}$, qui induit le **modèle image** $(\mathcal{X}, \mathcal{B}, (P_\theta^X)_{\theta \in \Theta})$. Ce dernier est généralement supposé être un **modèle identifiable**. On cherche à estimer une fonction (donnée, mesurable) $g : \Theta \mapsto \mathbf{R}^Q$ du paramètre θ ;

(b) un **espace de décision** $(D, \mathcal{B}_D)$ tq D soit en **bijection** avec l'image $g(\Theta)$ de Θ par g. En pratique, on choisit $D = g(\Theta)$ et cette bijection n'est autre que l'**identité** dans D (ie $g = id_D$). Cet ensemble des décisions $g(\Theta)$ est généralement muni d'une **tribu de parties** ad hoc (eg la tribu **trace** de Θ sur $\mathbf{R}^Q$) ;

(c) une **fonction de perte** $L : D \times g(\Theta) \mapsto \mathbf{R}_+$.

(ii) Le résultat $x = X(\omega) \in \mathcal{X}$, relatif à un **phénomène** donné, est assimilé à une **observation** issue d'une « **expérience aléatoire** ». Le problème consiste à induire une valeur (unique) pour $g(\theta)$, compte tenu de pertes possibles décrites par la fonction L.

En notant $g(\Theta) = \mathbf{R}^Q$, on parle :

(a) de **problème d'estimation (ponctuelle) scalaire** lorsque Q = 1 ;

(b) de **problème d'estimation (ponctuelle) vectorielle** lorsque Q > 1.

Dans ce **problème de décision** statistique, une **règle de décision pure** est appelée **estimateur pur** : elle est définie par l'application $\delta : \mathcal{X} \mapsto g(\Theta)$. On la note souvent t, et la va $T = t(X) = t \circ X : \Omega \mapsto g(\Theta)$ est aussi appelée **estimateur ponctuel** (pur) de $g(\theta)$.

En pratique, lorsque $\Theta \subset \mathbf{R}^Q$ et que $g(\Theta) = \mathbf{R}^S$ avec S > 1, on choisit souvent g tq :

(a) si S = Q, alors $g(\theta) = \theta, \forall \theta \in \Theta$;

(b) si S < Q, alors $g_s(\theta) = \theta_s$, $\forall s \in N_S{}^*$, à une **permutation** près des coordonnées de θ.

Si D = g (Θ) $\in \mathscr{B}(\mathbf{R}^Q)$ est une **partie convexe** et si la fonction de perte L est une **fonction convexe** pr à d (ie si l'application partielle d $\mapsto$ L (d, g (θ)) est convexe), on montre qu'il est possible de se limiter aux seuls estimateurs purs, éléments de l'ensemble $(g(\Theta))^{\mathscr{X}}$. Cette hypothèse est souvent faite, et un estimateur pur de ce type est simplement appelé **estimateur**.