**PROBLÈME DE BAYES EMPIRIQUE (G3)**
(14 / 05 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

(i) On considère un **modèle bayésien** ($\mathcal{X}$, $\mathcal{B}$, $(P_\theta^X)_{\theta \in \Theta}$, $\Pi$) dans lequel :

(a) l'**espace d'observation** est un espace produit ($\mathcal{X}_0^N$, $\mathcal{B}_0^{\otimes N}$) et $X = (X_1, ..., X_N) : \Omega \mapsto \mathcal{X}_0^N$ est un **échantillon iid** (ou une **suite iid**) constitué(e) d'observations $X_n$ qui suivent toutes la **loi** $P_\theta^\xi$ ($\forall\ \theta \in \Theta$), avec $P_\theta^X = (P_\theta^\xi)^{\otimes N}$ ;

(b) l'espace ($\Theta$, $\mathcal{B}_\Theta$) des **paramètres d'intérêt** est muni d'une **loi a priori**, ie d'une **mesure de probabilité** $\Pi$ définie sur $\mathcal{B}_\Theta$, mesure qui n'est autre que la loi de la **variable aléatoire** $\theta = id_\Theta$ (cf **application identique**). On note $\boldsymbol{\Pi}$ la **famille** des lois a priori $\Pi$ considérées ;

(c) chaque loi $P_\theta^X$ s'interprète eg comme une **probabilité de transition**, ou comme un **loi conditionnelle**, de X relativement à $\theta$.

(ii) Un **problème de décision** bayésien, associé au modèle précédent, met en jeu les données suivantes :

(a) un **espace de décision** (D, $\mathcal{B}_D$) et un ensemble $\Delta$ de **règles de décision** $\delta : \mathcal{X} \mapsto D$ ;

(b) une **fonction de perte** $L : D \times \Theta \mapsto \mathbf{R}_+$ dont la **fonction de risque** (classique) associée est notée R ($\delta$, $\theta$) et la **fonction de risque de BAYES** est notée $R_\Pi$ ($\delta$). On note $\delta_\Pi$ une **règle de BAYES** et $R_\Pi$* la valeur minimale du risque de BAYES précédent ;

(c) une **suite iid** $((X_1, \theta_1), ..., (X_N, \theta_N))$ constituée de **copies** de ($\xi$, $\theta$), où $\theta \sim \Pi$ et, conditionnellement à $\theta$, $\xi \sim P_\theta^X$. Par suite, la **loi inconditionnelle** (ie la **loi marginale**, ou **loi « propre »**) de X est $P^X = (P_\theta^\xi \wedge \Pi)^{\otimes N}$, où $P_\theta^\xi \wedge \Pi$ dénote, $\forall\ \theta \in \Theta$, le **mélange de lois** constituées de $P_\theta^X$ et des « poids » définis par $\Pi$, ie la loi « marginale » de $\xi$ ;

(d) une suite $(\delta_N)_{N \in \mathbf{N}^*}$ d'**applications mesurables** $\delta_N : \mathcal{X} \mapsto D$.

(iii) On appelle **problème de T. BAYES empirique** (H.E. ROBBINS) le problème de décision portant sur la valeur inconnue $\theta_N$ de $\theta$ à l' « instant » N au vu des observations X. La fonction de perte (classique) vaut alors L ($\delta_N$ (X), $\theta_N$).

Il s'agit donc d'un **problème de décision séquentielle** qui suppose, implicitement, que le **modèle statistique** précédent est plongé dans un **modèle produit** dénombrable (ie un **modèle d'échantillonnage**). Dans ce cadre, la suite :

(1) $\delta = (\delta_N)_{N \in \mathbf{N}^*}$

est appellée **règle (de décision) de BAYES empirique**, ou simplement **règle de BAYES empirique**, associée au problème de BAYES empirique.

(iv) La **théorie de BAYES empirique** a pour principal objet la détermination des règles de décision qui sont asymptotiquement optimales.

Une règle $\delta$ est appelée **règle asymptotiquement optimale** ssi :

(1) $\lim_N E\, L(\delta_N(X), \theta_N) = R_\Pi^*$,

la convergence devant être vérifiée pour toutes les lois a priori $\Pi \in \mathbf{\Pi}$.