PROBLÈME DE DÉCISION (G, H, I, J, K, L, M, N)
(03 / 05 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

Le concept de **problème de décision** (cf aussi **décision statistique**) sous-tend de très nombreuses **procédures statistiques**.

(i) Dans le cas d'un **modèle paramétré**, un **problème de décision classique (de base)** met essentiellement en jeu :

(a) un **modèle statistique** de base $(\Omega, \mathcal{T}, (P_\theta)_{\theta \in \Theta})$. Souvent, Θ est une **partie** d'un **espace vectoriel** réel V de dimension finie (Dim V = Q $\in$ **N***) (**modèle paramétrique**) ;

(b) un **espace de décision** $(D, \mathcal{B}_D)$;

(c) un **ensemble** de **règles de décision**. Ces décisions peuvent être pures, ie de la forme $\delta : \Omega \mapsto D$, et leur ensemble est noté Δ. Elles peuvent aussi être des **décisions mixtes**, ie de la forme $m : \Omega \times \mathcal{B}_D \mapsto [0, 1]$, et leur ensemble est noté Δ_M ;

(d) une **fonction de perte** $L : D \times \Theta \mapsto \mathbf{R}_+$, à laquelle est associée une **fonction de risque** $R : \Delta \times \Theta \mapsto \mathbf{R}_+$ (resp $\Delta_M \times \Theta \mapsto \mathbf{R}_+$).

Le problème consiste, au vu du tirage d'un élément $\omega \in \Omega$ effectué selon la **probabilité** P_θ , à choisir une règle pure δ dans Δ (resp une règle mixte m dans Δ_M) qui minimise le **risque** R.

De façon analogue, un **problème de décision bayésien** est un problème défini comme le précédent et qui comporte, en outre :

(e) une (mesure de) **probabilité a priori** Π, définie sur $\mathcal{B}_\Theta$ (**tribu de parties** de Θ) (on suppose donc que P_θ est une **probabilité de transition** sur $\Theta \times \mathcal{T}$) ;

(f) une fonction de risque bayésienne R_Π (qui se substitue à la fonction de risque « classique » R précédente) (cf **risque bayésien**).

On note parfois $\{(\Omega, \mathcal{T}, (P_\theta)_{\theta \in \Theta}, (D, \mathcal{B}_D), L\}$ un **problème de décision classique** et $\{(\Omega, \mathcal{T}, (P_\theta)_{\theta \in \Theta}, (D, \mathcal{B}_D), L, (\Theta, B_\Theta , \Pi)\}$ un **problème de décision bayésien**.

(ii) De la même façon, un **problème de décision classique (image)** met en jeu :

(a) un **modèle image** $(\mathcal{X}, \mathcal{B}, (P_\theta^X)_{\theta \in \Theta})$, ie une image du modèle de base précédent par une **va** (**statistique** ou **échantillon**) $X : \Omega \mapsto \mathcal{X}$, où $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ désigne un **espace d'observation** donné ;

(b) le même **espace de décision** $(D, \mathcal{B}_D)$ que précédemment ;

(c) un ensemble (ou espace) de règles de décision pures $\delta : \mathcal{X} \mapsto D$ (resp mixtes $m : \mathcal{X} \times \mathcal{B}_D \mapsto [0, 1]$), noté Δ (resp Δ_M) ;

(d) une fonction de perte $L : D \times \Theta \mapsto \mathbf{R}_+$ à laquelle s'associe une fonction de risque $R : \Delta \times \Theta \mapsto \mathbf{R}_+$ (resp $\Delta_M \times \Theta \mapsto \mathbf{R}_+$).

Le problème consiste, au vu d'une **observation** $x = X(\omega) \in \mathcal{X}$ obtenue selon l'une des **lois** P_θ^X ($\theta \in \Theta$), à choisir une règle de décision pure δ dans Δ (resp une règle mixte m dans Δ_M) qui minimise le risque R.

Un **problème de décision bayésien** se définit de façon parallèle à celui d'un problème de base. On note alors $\{(\mathcal{X}, \mathcal{B}, (P_\theta^X)_{\theta \in \Theta}, (D, \mathcal{B}_D), L\}$ un problème de décision classique (image) et $\{(\mathcal{X}, \mathcal{B}, (P_\theta^X)_{\theta \in \Theta}, (D, \mathcal{B}_D), L, (\Theta, \mathcal{B}_\Theta), \Pi)\}$ un problème de décision bayésien (image).

(iii) La distinction entre **problème de base** et **problème image** peut être utile lorsqu'on distingue entre :

(a) le problème portant directement sur des **unités statistiques** $\omega \in \Omega$, notamment pour générer des **informations** (« **observations** ») relativement à un **phénomène** donné (cf **plan d'expérience**, **plan de sondage**) ;

(b) le problème portant sur des descripteurs, ou sur des « **mesures** », ie sur des **observations** $x = X(\omega) \in \mathcal{X}$ effectuées sur ces unités : eg modèle à plusieurs **variables** destiné à décrire ou à « théoriser » le phénomène.

(ii) Lorsque le modèle (image) considéré se présente sous **forme non paramétrée** (eg **modèle non paramétrique**) $(\mathcal{X}, \mathcal{B}, \mathcal{P}^X)$, on définit la notion de problème de décision de façon analogue, la définition de la fonction de perte étant modifiée selon $L : D \times \mathcal{P}^X \mapsto \mathbf{R}_+$ ou encore selon $L : D \times \Gamma \mapsto \mathbf{R}_+$ si l'on veut mettre en évidence un espace $(\Gamma, \mathcal{B}_\Gamma)$ de valeurs prises par une **caractéristique légale** $\gamma = c(P^X)$ (éventuellement vectorielle) associée aux **lois** $P^X \in \mathcal{P}^X$.

La définition de la fonction de risque en résulte directement.