

PROBLÈME DE DÉCISION MULTIPLE (I7)

(25 / 05 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

(i) Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (P_\theta)_{\theta \in \Theta})$ une **représentation statistique** de base dont la **famille** des probabilités est $(P_\theta)_{\theta \in \Theta}$, $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ un **espace d'état** (ou **espace d'observation**), $X : \Omega \mapsto \mathcal{X}$ une **statistique** (eg un **échantillon**) et $(\mathcal{X}, \mathcal{B}, (P_\theta^X)_{\theta \in \Theta})$ le **modèle image** du précédent par X .

On note D un **espace de décision** et R une **fonction de risque**.

Un **problème de décision** statistique $\{(\mathcal{X}, \mathcal{B}, (P_\theta^X)_{\theta \in \Theta}), D, R\}$ associé au modèle précédent est appelé **problème de décision multiple** ssi D est fini et possède au moins trois éléments, ie ssi $\text{Card } D \geq 3$:

(1) $D = \{d_1, \dots, d_k\}$, avec $k \geq 3$.

(ii) On distingue habituellement deux problèmes de ce type :

(a) le **problème de décision monotone**, dans lequel D est un **ensemble ordonné** (cf **relation d'ordre**) ;

(b) le **problème de décision non monotone**, généralement appelé **problème de classification**.

(iii) Dans un problème de décision multiple, on appelle :

(a) **règle de décision** pure $\delta : \mathcal{X} \mapsto D$ une règle fondée sur une **partition** (mesurable) $\{\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_k\} = \Pi_{\mathcal{X}}$ de $\mathcal{X}$. Cette partition est « adaptée » à D , au sens où :

(2) $X(\omega) = x \in \mathcal{X}_i \Leftrightarrow d_i = \delta(X(\omega)) = \delta(x)$, $\forall i \in N_k^*$.

(b) **règle de décision mixte** $m \in \Delta_M$ une **probabilité conditionnelle** $m(\cdot / X = x)$ définie sur $\mathcal{B}_D$ (**tribu de parties** de D), $\forall x \in \mathcal{X}$. Cette probabilité exprime que la décision d_i est prise au **hasard** selon la **loi** $m(\cdot / X = x)$ dès que $X(\omega) = x$ (cf aussi **probabilité de transition**). On a donc, par définition :

(3) $\sum_{i=1}^k m(d_i / X = x) = 1$, $\forall x \in \mathcal{X}$.

Par suite, le risque est défini par (cf **fonction de risque**) :

(4) $R(\theta, m) = \sum_{i=1}^k L(\theta, d_i) \cdot E_\theta m(d_i / X)$,

où L désigne la **fonction de perte** du problème.

En pratique, on considère que $m(d_i / X)$ est, $\forall i \in N_k^*$, une **fonction de test** mixte.

(iv) Dans le cas où $D = \Theta = \{\theta_1, \dots, \theta_k\}$ (ensemble des paramètres fini), on dispose d'une **suite** finie de **lois** P_θ^X définies sur $\mathcal{B}$, dont l'une d'elles est supposée avoir généré X . Si $\delta : \mathcal{X} \mapsto \Theta$ est un **estimateur** de la **vraie valeur** θ^* du **paramètre** θ , la probabilité d'une décision erronée est $P_\theta(\delta(X) \neq \theta)$. Cette probabilité joue un rôle important dans les procédures d'**estimation** de θ .

(v) A titre d'exemples, peuvent être considérés comme problèmes de décision multiple :

(a) un **problème de test** (statique) usuel (avec $k = 2$) ;

(b) un **problème de test à 3 niveaux**, avec $k = 3$: acceptation d'une **hypothèse de base** H_0 , non acceptation de H_0 , et « doute » (cf **test**, **test multiple pur**).