PROBLÈME DE DÉCISION SÉQUENTIELLE (G7)
(17 / 04 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

La **théorie de la décision** statistique ne concerne pas seulement des problèmes de type « statique », dans lesquels la décision est prise « une fois pour toutes ». Cette théorie inclut les cas où la (les) **décision(s) statistique(s)** est (sont) prise(s) au cours du **temps**, eg (cf aussi **décision adaptative**) :

(a) en matière de **production statistique** : dans certaines **situations statistiques**, les résultats (estimation, test, etc) instantanés d'un **plan d'expérience** ou d'un **sondage** peuvent conduire le **statisticien** à décider de l'arrêt (eg **précision** obtenue, réponse à un **stimulus**) ou de la poursuite de l'**expérimentation** ou du sondage (décision adaptative) ;

(b) en matière de **prévision**, le **phénomène** considéré se déroule, en principe, au cours du **temps** : une décision importante consiste à terminer (eg objectif atteint) ou à continuer l'opération de prévision (eg **prévision glissante**) ;

(c) dans le cadre du **contrôle** d'un **système** (cf **contrôle optimal**), où le **temps** intervient encore, la décision consiste à arrêter les calculs de contrôle (eg **trajectoire** optimale obtenue) ou à continuer (« déviation » du cheminement).

(i) Un **problème de décision séquentielle** est un **problème de décision** statistique dans lequel on considère :

(a) un **espace de décisions finales**, ou **espace d'actions finales**, $(D, \mathcal{B}_D)$;

(b) une **fonction de perte** $L : \Theta \times D \mapsto \mathbf{R}_+$, supposée bornée inférieurement ;

(c) une **suite** $X = (X_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ constituée de **variables observables** $X_n : \Omega \mapsto \mathcal{X}_n$, où, $\forall\ n \in \mathbf{N}^*$, $(\mathcal{X}_n , \mathcal{B}_n)$ désigne un **espace d'observation** (cf **espace des états** d'un **processus stochastique**). On pose $\mathcal{X} = \Pi_{n \in \mathbf{N}^*} \mathcal{X}_n$, $\mathcal{B} = \otimes_{n \in \mathbf{N}^*} \mathcal{B}_n$, et l'on suppose que X admet pour **lp** l'une des **lois** P_θ^X, ie que la loi $P_\theta^{(X(1)\ ,\dots,\ X(N))}$ est spécifiée, $\forall\ \theta \in \Theta$ et $\forall\ N \in \mathbf{N}^*$ (en notant ici X (n) pour désigner X_n) ;

(d) une suite $c_n = (c_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ de **fonctions de coût** définies selon :

(1) $\quad c_N : \Theta \times \mathcal{X}_1 \times \dots \times \mathcal{X}_N \mapsto \mathbf{R}_+ , \qquad \forall\ N \in \mathbf{N}^*,$

où $c_n (\theta, x_1 ,\dots, x_N)$ représente le coût résultant de l'obtention des **observations** $x_1 = X_1 (\omega) ,\dots, x_N = X_N (\omega)$ et d'un arrêt de l'**échantillonnage** (**sondage**, **expérimentation**, etc) à la N-ième **observation** (cf **variable d'arrêt**).

On suppose généralement que :

(2) $\quad c_N (\theta, x_1 ,\dots, x_N) \leq c_{N+1} (\theta, x_1 ,\dots, x_N , x_{N+1}), \qquad \forall\ N \in \mathbf{N}^*$ et $\forall\ \theta \in \Theta,$

ainsi que :

(3) $\lim_N c_N (\theta, x_1 ,..., x_N) = +\infty$, $\forall \theta \in \Theta$, $\forall x = (x_1 ,..., x_N) = X (\omega)$.

(ii) Le problème de la **théorie séquentielle** consiste à choisir la taille N de l'**échantillon** $(X_1 ,..., X_N)$ à observer ainsi qu'une **décision finale** $d^* \in D$ tq la somme de l'**espérance mathématique** du coût d'ensemble et de la fonction de perte soit minimum : en effet, un échantillon plus grand, s'il permet d'obtenir un risque statistique moindre, coûte généralement plus cher (d'après (2)).

En pratique, le coût d'une observation quelconque $X_n (\omega) = x_n$ est souvent une **constante** c, $\forall n \in \mathbf{N}^*$. Par suite, $c_N (\theta, x_1 ,..., x_N) = c \cdot N$ (**coût proportionnel** au nombre d'observations).

(iii) Un **problème de décision séquentielle invariant** (cf **problème invariant**) est un problème de décision séquentielle tq il existe une **groupe de transformations** mesurables $\mathcal{G}$ sur $\mathcal{X}_n = \mathcal{X}_0$ ($\forall n \in \mathbf{N}^*$) qui vérifie, $\forall N \in \mathbf{N}^*$, les propriétés suivantes :

(a) les lois sont invariantes (cf **mesure invariante**), ie il existe un groupe de transformations $\overline{\mathcal{G}}$ sur Θ tq, $\forall \theta \in \Theta$, $\forall g \in \mathcal{G}$ et $\forall \overline{g} \in \overline{\mathcal{G}}$:

(4) $\mathcal{L}_\theta (g (X_1) ,..., g (X_N)) = \mathcal{L}_{\overline{g} (\theta)} (X_1 ,..., X_N)$, $\forall N \in \mathbf{N}^*$;

(b) les pertes sont invariantes, ie il existe un groupe de transformations $\mathcal{G}^{\sim}$ sur D tq, $\forall \theta \in \Theta$, $\forall \overline{g} \in \overline{\mathcal{G}}$ et $\forall g^{\sim} \in \mathcal{G}^{\sim}$:

(5) $L \{ \overline{g} (\theta) , g^{\sim} (a) \} = L (\theta, d)$, $\forall d \in D$;

(c) les coûts sont invariants, ie :

(6) $c_N \{ \overline{g} (\theta) , g (x_1) ,..., g (x_N) \} = c_N (\theta, x_1 ,..., x_N)$, $\forall N \in \mathbf{N}^*$,

$\forall \theta \in \Theta$, $\forall g \in \mathcal{G}$, $\forall \overline{g} \in \overline{\mathcal{G}}$ et $\forall (x_1 ,..., x_N) \in \mathcal{X}_0^N$.