PROBLÈME DU NIL (G, H, I)
(10 / 05 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

Le **problème du Nil** (R.A. FISHER, 1936) fournit un exemple de mise en oeuvre d'une **statistique ancillaire**.

Ce modèle a servi à la **modélisation** des flux annuels du Nil. L'observation était constituée par l'ensemble des **mesures du débit** de ce fleuve pendant 100 ans (1871-1970) au niveau du barrage d'ASSOUAN (cf **Présentation de G. DARMOIS** du problème).

La résolution du problème peut se formaliser comme suit.

(i) Soit $\zeta = (\xi, \eta)$ un **couple aléatoire** réel scalaire dont la **loi** admet pour **densité** pr à λ_2 :

(1) $f(x, y, \theta) = \mathbf{1}(\mathbf{R}_+^2)(x, y) . \exp\{-(\theta x + \theta^{-1} y)\}, \qquad \forall \theta \in \mathbf{R}_+^*,$

où $\mathbf{1}$(B) désigne l'**indicatrice** d'une **partie** $B \in \mathbf{R}^2$.

(ii) Si $Z = (X_n, Y_n)_{n=1,\ldots,N}$ désigne un **échantillon iid** selon ζ, on peut estimer le **paramètre** θ, eg à l'aide de la **méthode du maximum de vraisemblance** ou de la **méthode des moments**.

(iii) On peut alors tester l'**hypothèse de base** $H_0 : \theta = \theta_0$ (donné) contre l'**alternative** $H_a : \theta = \theta_a$ (donné).

Un test (eg **test de NEYMAN-PEARSON**) de niveau $\alpha \in]0, 1[$ conduit à la **région critique** (rejet de H_0) suivante :

(2) $w = [(U - V) / (\theta_0 \theta_a) \leq q_{1-\alpha}],$

avec $U = \Sigma_{n=1}^N X_n = N . \bar{X}_N$, $V = \Sigma_{n=1}^N Y_n = N . \bar{Y}_N$, et $q_{1-\alpha}$ vérifie :

(3) $\alpha = \int_{R+} \int_{R+} \{v (\theta_0 / \theta_a) + q_{1-\alpha}\} g(u) du \, g(v) dv,$

où g désigne la densité d'une **loi gamma** de paramètre N (puisque θ U et V / θ sont des va indépendantes qui suivent des lois gamma).