PROCESSUS À ACCROISSEMENTS INDÉPENDANTS (D1, N2)
(13 / 05 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

(i) Soit $X = \{(\Omega, \mathcal{T}, P), (\mathcal{X}, \mathcal{B}), (X_t)_{t \in T}\}$ un **processus stochastique**.

On dit que X est un **processus à accroissements indépendants** (B. de FINETTI), ou un **processus différentiel** (J.L. DOOB), ou un **processus homogène** (H. CRAMER), ou encore un **processus additif** (P.P. LÉVY), ssi :

(a) $\mathcal{X}$ est un **groupe** additif abélien (ou une **partie** stricte d'un tel groupe) (eg un **espace vectoriel** réel : souvent, $\mathcal{X} = \mathbf{R}^K$) ;

(b) T est un groupe additif ordonné (ou une partie d'un tel groupe) (eg $T \subset \mathbf{N}$, ou $T \subset \mathbf{Z}$, ou $T = [a, b[$, ou $T \subset \mathbf{R}$, ou encore $T \subset \mathbf{R}_+$) (cf **relation d'ordre**) ;

(c) pour toute **partie** finie $S = \{t_1, ..., t_p\} \subset T$ tq $t_j < t_{j+1}$, $\forall j \in N_{p-1}^*$, les **variables aléatoires** suivantes, appelées **accroissements** de X, :

(1) $X_{t(1)} - 0 = X_{t(1)}$, $X_{t(2)} - X_{t(1)}$,..., $X_{t(p)} - X_{t(p-1)}$

sont indépendantes (où t(j) désigne t_j) (cf **indépendance**).

Si l'on pose $\Delta_{h(i)} X_{t(i)} = X_{t(i+1)} - X_{t(i)}$ (**différence finie** de pas $h_i = t_{i+1} - t_i$ de X), la propriété signifie que la **suite** $(\Delta_{h(i)} X_{t(i)})_{i = 1,..., p-1}$ des accroissements de X est une **suite indépendante**, quelle que soit la suite finie (strictement) croissante $(t_1, ..., t_p)$ sur T.

Si T admet un plus petit élément $t_0 = \min T$, on dit parfois que $X_{t(0)}$ est l'**état initial** du processus et que $\mathcal{L}(X_{t(0)})$ ou $P^{Xt(0)}$ est sa **loi initiale**, ou sa **distribution initiale** (où t(j) désigne t_j et Xt(j) désigne $X_{t(j)}$).

La propriété d'indépendance précédente se traduit, pour toute partie finie $S = \{t_1, ..., t_p\} \subset T$, par la suivante (produit de **convolution des lois** marginales élémentaires) (cf **loi marginale**, **produit de convolution**) :

(2) $\mathcal{L}(X_{t(p)} - X_{t(p-1)}) = \ast_{j=1}^{p-1} \mathcal{L}(X_{t(j+1)} - X_{t(j)})$.

(ii) On note encore, de façon équivalente, un **processus à accroissements indépendants** en remplaçant (1) par :

(3) $\Delta_{h(j)} X_t \perp \Delta_{h(k)} X_t$, $\forall k \neq j, \forall (t_1, ..., t_p) \in T^p_<$, $\forall p \geq 3$,

où $\xi \perp \eta$ signifie que les va ξ et η sont indépendantes et où l'on note $T^p_< = \{(t_1, ..., t_p) \in T^p : t_1 < ... < t_p\}$.

(iii) Si les accroissements $\Delta_{h(i)}$ ont chacun une **loi** qui ne dépend que de $h_i = t_{i+1} - t_i$, $\forall (t_1 ,..., t_p) \in T^p_<$, on dit que X est un **processus à accroissements stationnaires** (indépendants).

(iv) Si X est à accroissements indépendants, on dit que X est un **processus homogène** ssi :

(4) $\mathscr{L}(X_t - X_s) = \mathscr{L}(X_{t+h} - X_{s+h})$, $\forall (s, t, h) \in T^3$ tq $(s+h, t+h) \in T^2$.

(v) Si T = $\mathbf{R}_+$ et si, $\forall$ h = t - s $\in$ T, on note $Q_h = \mathscr{L}(X_t - X_s)$ la **loi de probabilité** de l'accroissement $X_t - X_s$, alors la **famille** $(Q_h)_{h \in T}$ est un **semi-groupe de convolution** sur $\mathscr{B}$ ssi :

(5) $Q_{h(1) +... + h(p)} = *_{j=1}^{p} Q_{h(j)}$, $\forall (h_1 ,..., h_p) \in T^p$.

(vi) On montre que :

(a) si f : T $\mapsto \mathscr{X}$ est une fonction donnée (**fonction de centrage** de P.P. LÉVY), le **processus centré** C = $(C_t)_{t \in T}$ défini selon $C_t = X_t - f(t)$, $\forall$ t $\in$ T, est aussi un processus à accroissements indépendants (cf **centrage**, **centralité**). Dans certains cas, les **trajectoires** de C sont plus simples à étudier : eg lorsque f (t) = E X_t , ceci définit le **procédé de régularisation de P.P. LÉVY** ;

(b) si inf T = $t_0 \in \mathbf{R}$ (nombre fini), le processus D défini selon $D_t = X_t - X_{t(0)}$ est un processus à accroissements indépendants (comme X lui-même) et il vérifie $d_{t(0)} = D_{t(0)} (\omega) = 0$ pour toute trajectoire (indexée par) $\omega \in \Omega$;

(c) si X et Y sont deux processus à accroissements indépendants définis sur $(\Omega, \mathscr{T}, P)$, si $\mathscr{X}$ est un **espace vectoriel** (eg réel), et si X $\perp$ Y (processus indépendants entre eux), alors le processus Z défini par « combinaison linéaire » Z = α X + β Y est, $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2$, un processus à accroissements indépendants. Si l'**espace des états** est discret (eg $\mathscr{X} = \mathbf{N}^m$ ou $\mathbf{Z}^m$), on dit aussi que X est une **promenade aléatoire**.

(vii) Ce que la terminologie courante désigne par « **accroissement** » correspond, en toute rigueur, à la notion (plus générale) de « **variation** », puisque les différences définies eg en (1) peuvent être de **signe** quelconque (eg négatif). On devrait donc plutôt parler de « **processus à variations indépendantes** ».