

PROCESSUS AUTORÉGRESSIF (D2, J1, J8, N2)

(26 / 07 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

(i) Soit $X = \{(\Omega, \mathcal{F}, P), (\mathbf{R}, \mathcal{B}_{\mathbf{R}}), (X_t)_{t \in T}\}$ un **processus stochastique** réel scalaire en **temps** discret (ie $\mathcal{X} = \mathbf{R}$ et $T = \mathbf{Z}$).

On dit que X est un **processus autorégressif** d'ordre $p \in \mathbf{N}^*$ ssi il vérifie l'équation dynamique suivante, dans l'**espace des états** (cf **équation de récurrence**) :

$$(1) \quad X_t = \sum_{i=1}^p \alpha_i X_{t-i} + u_t, \quad \forall t \in T,$$

où $\alpha_i \in \mathbf{R}, \forall i \in \mathbf{N}_p^*$, et $u = (u_t)_{t \in T}$ est un **bruit blanc** (avec $E u_t = 0$ et $E u_s u_t = \delta_{st} \sigma^2$, $\forall (s, t) \in T^2$).

L'équation (1) peut se représenter à l'aide de l'**opérateur retard** B :

$$(2) \quad \Phi(B) X_t = (1 - \alpha_1 B - \dots - \alpha_p B^p) X_t = u_t,$$

où Φ est la fonction polynômiale (de degré p) définie sur $\mathbf{R}$ par $\Phi(z) = 1 - \alpha_1 z - \dots - \alpha_p z^p$.

Pour exprimer que X est un processus autorégressif d'ordre p on écrit indifféremment :

(a) $X = \text{ar}(p)$, ou $X = \text{AR}(p)$;

(b) ou $X \in \mathbf{ar}(p)$;

(c) ou encore $X \in \mathbf{AR}(p)$ (classe des processus autorégressifs d'ordre p).

(ii) On note que :

(a) les racines de Φ peuvent toujours être supposées de module strictement supérieur à 1 (il suffit de « changer » de bruit blanc u). On définit ainsi la **représentation canonique** (1) de X . Par suite, on montre que X admet une **représentation moyenne mobile** :

$$(3) \quad X_t = \sum_{i=0}^{+\infty} \beta_i u_{t-i}, \quad \text{avec } \beta_0 = 1 \text{ et } \sum_{i=0}^{+\infty} |\beta_i| < +\infty ;$$

(b) si F désigne l'**opérateur avance**, on appelle **représentation avant** de X le processus $Y = (Y_t)_{t \in T}$ défini selon :

$$(4) \quad Y_t = \Phi(F) X_t ;$$

(c) si $X \in \mathbf{AR}(p)$, alors X est un **processus stationnaire en covariance**.

(iii) On définit, de façon analogue, la notion de **processus autorégressif vectoriel** (ie à valeurs dans $\mathcal{X} = \mathbf{R}^K$ ou dans $\mathcal{X} = \mathbf{C}^K$).

On note alors eg ARV (p), ou VAR (p), ou $X \in \mathbf{AR}_K(p)$.

Ce type de processus est de nature « autogène », au sens où la valeur du moment (chaque instant t) des K variables composant X dépendent de leurs valeurs antérieures, et que les valeurs ultérieures peuvent directement s'en déduire (cf aussi **modèle dynamique, modèle d'interdépendance dynamique, prévision**).

(iv) On généralise la notion « linéaire » précédente en celle de **processus autorégressif non linéaire**. L'équation (1) est remplacée par l'équation :

$$(5) \quad X_t = f_t(X_{t-1}, \dots, X_{t-p}) + u_t \quad \text{ou} \quad f(t, X_{t-1}, \dots, X_{t-p}) + u_t.$$

(iv) On peut aussi définir une notion de **processus autorégressif en temps continu** (eg avec $T = \mathbf{R}$) selon l'**équation différentielle stochastique** :

$$(6) \quad X_t = f_t(X_t^{(1)} + \dots + X_t^{(p)}) + u_t, \quad \forall t \in T,$$

où $X_t^{(j)}$ suppose définie une notion de **dérivée stochastique** (d'ordre j) sur la **famille** $X = (X_t)_{t \in T}$.

(v) L'estimation des paramètres des processus autorégressifs s'effectue souvent à l'aide de la **méthode des moindres carrés** (ordinaires) ou de la **méthode du maximum de vraisemblance** (gaussienne) (cf **méthodes de BOX-JENKINS**).