

PROCESSUS AUTORÉGRESSIF DE MOYENNE MOBILE (D2, N2, N3)

(08 / 06 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

(i) Soit $X = \{(\Omega, \mathcal{F}, P), (\mathbf{R}, \mathcal{B}_{\mathbf{R}}), (X_t)_{t \in T}\}$ un **processus stochastique** réel scalaire en **temps** discret (ie $\mathcal{X} = \mathbf{R}$ et $T = \mathbf{Z}$).

On dit que X est un **processus autorégressif de moyenne mobile**, ou parfois un **processus mixte**, d'ordre (p, q) ssi il vérifie l'**équation dynamique** suivante, écrite dans l'**espace des états** (cf aussi **équation de récurrence**) :

$$(1) \quad X_t + \sum_{i=1}^p \alpha_i X_{t-i} = \beta_0 u_t + \sum_{j=1}^q \beta_j u_{t-j}, \quad \forall t \in T,$$

où $(\alpha_i, \beta_j) \in \mathbf{R}^2, \forall (i, j) \in N_p^* \times N_q^*$ et où $u = (u_t)_{t \in T}$ désigne un **bruit blanc** (ie $E u_t = 0$ et $E u_s u_t = \delta_{st} \sigma^2, \forall (s, t) \in T^2$).

On peut aussi représenter (1) à l'aide de l'**opérateur retard** B :

$$(2) \quad (1 + \sum_{i=1}^p \alpha_i B^i) X_t = (\beta_0 + \sum_{j=1}^q \beta_j B^j) u_t,$$

ie :

$$(3) \quad \Phi(B) X_t = (b_0 + \Psi(B)) u_t,$$

où Φ et Ψ sont des fonctions polynômiales (resp de degrés p et q) resp définies sur $\mathbf{R}$ selon $\Phi(z) = 1 + \sum_{i=1}^p \alpha_i z^i$ et $\Psi(z) = \beta_0 + \sum_{j=1}^q \beta_j z^j$ et $1 = \Phi^0$ représente l'**opérateur identité**.

Pour exprimer que X est un processus autorégressif de moyenne mobile d'ordre (p, q) , on note :

$$(a) \quad X = \text{armm}(p, q) \text{ ou } X = \text{ARMM}(p, q);$$

(b) ou $X \in \mathbf{ARMM}(p, q)$ (classe des processus autorégressifs de moyenne mobile d'ordre (p, q)) (en anglais $X \in \mathbf{ARMA}(p, q)$).

(ii) On peut noter que :

(a) un processus autorégressif d'ordre $(0, q)$ n'est autre qu'un **processus de moyenne mobile**, ie $\text{armm}(0, q) = \text{mm}(q)$;

(b) de même, un processus autorégressif de moyenne mobile d'ordre $(p, 0)$ n'est autre qu'un **processus autorégressif**, ie $\text{armm}(p, 0) = \text{ar}(p)$;

(c) les racines de Φ et de Ψ peuvent toujours être supposées de module strictement supérieur à 1 (il suffit de « changer » de bruit blanc u), hypothèse qui est souvent implicite ;

(d) on peut toujours se ramener au cas où $\beta_0 = 0$ en remplaçant X par le **processus centré** $C = X - E X$ (ie tq $C_t = X_t - E X_t, \forall t \in T$) ;

(e) la représentation (1) est souvent remplacée par la forme alternative :

$$(4) \quad X_t - \sum_{i=1}^p \alpha_i X_{t-i} = \beta_0 u_t - \sum_{j=1}^q \beta_j u_{t-j} .$$

Dans ce cas, le polynôme Φ devient tq $\Phi(z) = 1 - \sum_{i=1}^p \alpha_i z^i$ et le polynôme Ψ devient tq $\Psi(z) = \beta_0 - \sum_{j=1}^q \beta_j z^j$;

(f) si $X \in \text{armm}(p, q)$, alors X est un **processus stationnaire en covariance**.

(iii) On peut définir, de façon analogue, les notions de :

(a) **processus autorégressif de moyenne mobile vectoriel** (ie à valeurs dans $\mathcal{X} = \mathbf{R}^K$ ou dans $\mathcal{X} = \mathbf{C}^K$) ;

(b) **processus autorégressif de moyenne mobile non linéaire** selon une équation de la forme :

$$(5) \quad f_t(X_t, X_{t-1}, \dots, X_{t-p}) = g_t(u_t, u_{t-1}, \dots, u_{t-p}), \quad \forall t \in T.$$

(iv) Enfin, sous certaines conditions (ie si la notion de **dérivée** stochastique est définie) (cf **intégrale stochastique**), on peut définir un **processus autorégressif de moyenne mobile en temps continu** (eg avec $T = \mathbf{R}$) :

(a) soit selon :

$$(6)_a \quad X_t + \int_R \alpha_i X_{t-i} di = \beta_0 u_t + \int_S \beta_j u_{t-j} dj, \quad \forall t \in T,$$

ou, plus synthétiquement :

$$(6)_b \quad \int_R \alpha_i X_{t-i} di = \int_S \beta_j u_{t-j} dj, \quad \forall t \in T, \quad (\text{avec } \alpha_0 = 1) ;$$

(b) soit encore (lorsque l'**espace du temps** $(T, \mathcal{B}_T)$ est doté d'une mesure positive μ) selon :

$$(7)_a \quad X_t + \int_R \alpha_i X_{t-i} d\mu(i) = \beta_0 u_t + \int_S \beta_j u_{t-j} d\mu(j), \quad \forall t \in T,$$

ou, plus synthétiquement :

$$(7)_b \quad \int_R \alpha_i X_{t-i} d\mu(i) = \int_S \beta_j u_{t-j} d\mu(j), \quad \forall t \in T, \quad (\text{avec } \alpha_0 = 1).$$

Les ensembles $R \subset T$ des valeurs de i et $S \subset T$ des valeurs de j peuvent être des segments de cet espace.

(c) soit même selon :

$$(8) \quad f_t(X_t, X_t^{(1)}, \dots, X_t^{(p)}) = g_t(u_t, u_t^{(1)}, \dots, u_t^{(q)}), \quad \forall t \in T,$$

où le symbole $X_t^{(i)}$ (resp $u_t^{(j)}$) désigne la dérivée d'ordre i de X_t (resp j de u_t).

(v) L'estimation d'un processus armm s'effectue généralement à l'aide d'une **méthode des moindres carrés** (ordinaires) ou d'une **méthode du maximum de vraisemblance** (gaussienne) (cf **méthodes de BOX-JENKINS**).