PROCESSUS CIRCULAIRE (N2)
(08 / 01 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

(i) On appelle parfois **processus circulaire** un **processus stochastique** réel scalaire $X = \{(\Omega, \mathcal{T}, P), (\mathbf{R}, \mathcal{B}_{\mathbf{R}}), (X_t)_{t \in T}\}$ en **temps** discret (ie eg $T = N_T^*$) (on note de la même façon l'ensemble T et son élément maximum) et tq :

(a) X est un processus centré ($E\, X_t = 0$, $\forall\, t \in T$) et un **processus stationnaire en covariance**. On pose alors $V\, X_t = \sigma^2$;

(b) la **fonction d'autocovariance** $\theta \mapsto \gamma_\theta = E\, X_t\, X_{t+\theta}$ de X vérifie :

(1) $\gamma_\theta = \sigma^2 \rho_\theta$, avec $\rho_{T+\theta} = \rho_{T-\theta} = \rho_\theta$,

où $\theta \mapsto \rho_\theta$ désigne la **fonction d'autocorrélation** de X.

(ii) Si l'on pose $X = (X_1, \ldots, X_T)' : \Omega \mapsto \mathbf{R}^T$ (**vecteur aléatoire**), la **matrice de covariance** de X s'écrit donc :

$$V\,X = \sigma^2 \,.\, \begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \cdots & \rho_2 & \rho_1 \\ & 1 & \rho_1 & \cdots & & \rho_2 \\ & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & & & \ddots & \rho_1 \\ & \text{sym.} & & & & 1 \end{bmatrix}$$

Si l'on note f la **densité spectrale** de X, ie :

(2) $f(\omega) = (2\,\pi)^{-1} \Sigma_{\theta \in T}\ \gamma_\theta\, e^{-i\,\theta\,\omega}$,

on montre (lemme de J. WISE) que (cf **spectre d'un opérateur**) :

(3) $f\{2\,\pi\,(t / T)\} \in Sp\,(V\,X)$, $\forall\, t \in T$.