PROCESSUS CONTINU (N2)
(23 / 10 / 2019, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2019)

Divers éléments de base définissant un **processus stochastique** peuvent être dotés d'une propriété de **continuité** : l'**espace d'observation** (ou **espace d'état**) ($\mathscr{X}$, $\mathscr{B}$), le **temps** T (cf **espace du temps**) ou la **famille** elle-même $(X_t)_{t \in T}$ des **va** constituant le processus.

La notion de **processus continu** est distincte de celle de processus en **temps** continu : en effet, la notion de **continuité d'un processus** est liée à l'étude de ses **trajectoires**.

(i) Soit $X = \{(\Omega, \mathscr{T}, P), (\mathscr{X}, \mathscr{B}), (X_t)_{t \in T}\}$ un **processus** tq :

(a) X est un **espace de BANACH** (eg $\mathscr{X} = \mathbf{R}^K$ ou $\mathscr{X} = \mathbf{C}^K$) ;

(b) T est muni d'une **topologie** $\mathscr{O}(T)$ (eg $T \subset \mathbf{R}$).

On dit que X est un **processus continu** ssi, étant donné un **mode de convergence** stochastique st. défini sur l'ensemble de ses variables X_t , on a (cf **convergence stochastique**) :

(1) $\quad \text{st.} \lim_{t \to t(0),\, t \in T} (X_t - X_{t(0)}) = 0, \qquad \forall\, t \in T,$

où t(0) désigne $t_0 \in T$.

Ainsi, $\forall\, t_0 \in T$, les variables X_t tendent vers la va $X_{t(0)}$ au sens du mode de convergence considéré. Les principaux modes de convergence stochastique utilisés en **théorie des processus** sont la **convergence en probabilité** (ou convergence stochastique au sens étroit) (cf **convergence étroite**), la **convergence presque sûre** et la **convergence dans L^p** (ou convergence en moyenne d'ordre p), dont la **convergence en moyenne quadratique** est la plus commune.

(ii) Ainsi, pour définir une notion de continuité des processus, on doit définir une notion de limite sur T ainsi qu'une notion de limite (dans $\mathscr{X}$) de la famille $X = (X_t)_{t \in T}$ (eg limite stochastique selon un **filtre topologique**).