PROCESSUS CONTINU DANS $\mathscr{L}^p$ (N2)
(20 / 11 / 2019, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2019)

(i) Soit X = {(Ω, $\mathscr{T}$, P), ($\mathscr{X}$, $\mathscr{B}$), $(X_t)_{t \in T}$} un **processus stochastique** tq :

(a) $\mathscr{X}$ est un **espace de BANACH** (eg $\mathscr{X} = \mathbf{R}^K$, ou $\mathscr{X} = \mathbf{C}^K$ ou $\mathscr{X} = M_{np}(\mathbf{R})$) ;

(b) T est un **espace topologique**, dont la **topologie** est notée $\mathscr{O}(T)$;

(c) $X_t \in \mathscr{L}_{\mathscr{X}}^2 (\Omega, \mathscr{T}, P)$, $\forall$ t $\in$ T.

On dit que X est un **processus continu dans L^p**, ou un **processus continu en moyenne d'ordre p**, au point $t_0 \in T$ ssi :

(1) $\lim_{t \to t(0),\, t \in T} N_p (X_t - X_{t(0)}) = 0,$

où N_p désigne la **norme** d'ordre p > 1 définie sur $\mathscr{L}_{\mathscr{X}}^p (\Omega, \mathscr{T}, P)$.

On dit que X est un processus continu dans $\mathscr{L}^p$, ou un processus continu en moyenne d'ordre p, ssi il vérifie (1) en tout point $t_0 \in T$.

(ii) Un exemple important est celui du **processus continu en moyenne quadratique** (p = 2). Ainsi, lorsque $\mathscr{X} = \mathbf{R}^K$ et $T \subset \mathbf{R}$, l'**application** $T \mapsto L_{\mathbf{R}K}^2 (\Omega, \mathscr{T}, P)$ définie par $t \mapsto X_t$ est une **application continue** ssi :

(2) $\lim_{t \to t(0),\, t \in T} E \|X_t - X_{t(0)}\|^2 = 0, \qquad \forall\, t_0 \in T,$

l'**espérance** E étant calculée avec la **mesure de probabilité** P.

La définition (2) s'étend directement au cas où T est un **espace métrique** (muni d'une **distance** δ), ie :

(3) $\lim_{\delta(t,\, t(0)) \to 0} E \|X_t - X_{t(0)}\|^2 = 0, \qquad \forall\, t_0 \in T.$

Dans (2) et (3), la norme ||.|| est celle (euclidienne) de $\mathbf{R}^K$.