

PROCESSUS CONTINU EN PROBABILITÉ (N2)

(20 / 11 / 2019, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2019)

(i) Soit $X = \{(\Omega, \mathcal{F}, P), (\mathcal{X}, \mathcal{B}), (X_t)_{t \in T}\}$ un **processus** tq :

(a) $\mathcal{X}$ est un **espace de BANACH** (eg $\mathcal{X} = \mathbf{R}^K$, $\mathcal{X} = \mathbf{C}^K$ ou $\mathcal{X} = M_{np}(\mathbf{R})$) ;

(b) T est muni d'une **topologie** $\mathcal{O}(T)$.

On dit que X est un **processus continu en probabilité**, ou un **processus stochastiquement continu**, au point $t_0 \in T$ ssi la **va** X_t admet pour **probabilité** limite la **va** $X_{t(0)}$ lorsque t tend vers t_0 dans T , ie (cf **convergence en probabilité**) :

$$(1) \quad \forall \varepsilon > 0, \lim_{t \rightarrow t(0), t \in T} P(\|X_t - X_{t(0)}\| > \varepsilon) = 0,$$

où l'on note aussi $t(0) \in T$ pour désigner t_0 .

Si (1) est vérifiée $\forall t_0 \in T$, on dit que X est un processus continu en probabilité (ou stochastiquement continu, ou simplement continu) sur T .

On note aussi (1) selon :

$$(2) \quad P\text{-}\lim_{t \rightarrow t(0), t \in T} X_t = X_{t(0)}.$$

(ii) La définition (1) s'étend au cas où $\mathcal{X}$ est un **espace métrique** $(\mathcal{X}, d)$ muni de sa **tribu borélienne** $\mathcal{B}$. On écrit alors :

$$(3) \quad \forall \varepsilon > 0, \lim_{t \rightarrow t(0), t \in T} P(d(X_t, X_{t(0)}) > \varepsilon) = 0.$$

De plus, lorsque T est aussi métrique (avec une **distance** δ), (3) devient :

$$(4) \quad \forall \varepsilon > 0, \lim_{\delta(t, t(0)) \rightarrow 0} P(d(X_t, X_{t(0)}) > \varepsilon) = 0.$$

On note alors $P\text{-}\lim_{t \rightarrow t(0)} X_t = X_{t(0)}$ ou $\text{plim}_{t \rightarrow t(0)} X_t = X_{t(0)}$.