PROCESSUS CONTINU PRESQUE SÛREMENT (N2)
(20 / 11 / 2019, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2019)

(i) Soit X = $\{(\Omega, \mathcal{T}, P), (\mathcal{X}, \mathcal{B}), (X_t)_{t \in T}\}$ un **processus** tq :

(a) $\mathcal{X}$ est un **espace de BANACH** ou un **espace métrique** ($\mathcal{X}$, d), avec $\mathcal{B}$ pour **tribu borélienne** (eg $\mathcal{X} = \mathbf{R}^K$, ou $\mathcal{X} = \mathbf{C}^K$ ou encore $\mathcal{X} = M_{np}(\mathbf{R})$) ;

(b) T est muni d'une **topologie** $\mathcal{O}(T)$.

On dit que X est un **processus continu presque sûrement**, ou un **processus presque sûrement continu**, au point $t_0 \in T$ ssi :

(1) $\lim_{t \to t(0),\, t \in T} X_t = X_{t(0)}$, P-p.s.,

où t(0) désigne t_0 .

On dit que X est un processus continu presque sûrement (ou presque sûrement continu) ssi (1) est vérifié $\forall\, t_0 \in T$.

(ii) En chaque point $t_0 \in T$ on peut définir l'ensemble P-négligeable $\mathcal{N}(t_0) = \{X_t \to X_{t(0)}\}^c$ (**ensemble de divergence** en $X_{t(0)}$ de la **famille** X = $(X_t)_{t \in T}$) (cf **partie négligeable**), avec :

(2)
$$\{X_t \to X_{t(0)}\} = \{\omega \in \Omega : \lim_{t \to t(0)} X_t = X_{t(0)}\} \subset \Omega,$$
$$P(\mathcal{N}(t_0)) = 0, \qquad \forall\, t_0 \in T.$$

L'ensemble des **trajectoires** $(t \mapsto X_t(\omega))_{\omega \in \Omega}$ peut donc être partitionné en deux classes : celle des trajectoires continues en tout point $t_0 \in T$ et celle des trajectoires qui ne le sont pas. Cette dernière est donc $(t \mapsto X_t(\omega))_{\omega \in \mathcal{N}}$, avec $\mathcal{N} = \cup_{t(0) \in T} \mathcal{N}(t_0)$ et $P(\mathcal{N}) = 0$. L'ensemble des trajectoires continues sur T n'est donc pas nécessairement P-négligeable.

On dit que X est un **processus presque sûrement à trajectoires continues**, ou un **processus à trajectoires presque sûrement continues**, ssi il existe un **évènement presque certain** $C \in \mathcal{T}$ (ie tq P (C) = 1) sur lequel toute trajectoire $t \mapsto X_t(\omega)$ ($\omega \in C$) est (partout) continue sur T.