

PROCESSUS CROISSANT ASSOCIÉ À UNE MESURE (N12)

(20 / 11 / 2019, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2019)

(i) Soit $X = \{(\Omega, \mathcal{F}, P), (\mathbf{R}, \mathcal{B}_{\mathbf{R}}), (X_t)_{t \in T}\}$ un **processus** réel scalaire tq $T = [0, T]$ (en notant T aussi bien l'ensemble T que sa borne supérieure). On pose :

(a) $R_1 = [0, 1]$;

(b) \mathcal{F}^{\otimes} la **tribu de parties** de $\Omega \times \mathcal{R}$ engendrée par les pavés de la forme $I_t = H_t \times]s, t]$, où $H_t \in \mathcal{F}_t$ et où $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in T}$ désigne une **filtration** sur \mathcal{F} (cf **tribu engendrée**).

Soit μ une **mesure positive** bornée sur \mathcal{F}^{\otimes} (cf **mesure bornée**), supposée nulle sur $\mathcal{N} \times \mathbf{R}_1$ (où \mathcal{N} désigne la classe des évènements P -négligeables de \mathcal{F}). On suppose que $\mathcal{N} \subset \mathcal{F}_t, \forall t \in T$.

(ii) On établit alors qu'il existe un **processus croissant** $A = (A_t)_{t \in T}$ **associé à μ** , nul en $t = 0$ (ie $A_0 = 0$), P -intégrable (ie $A_t \in \mathcal{L}_{\mathbf{R}}^1(\Omega, \mathcal{F}, P), \forall t \in T$), continu à droite et tq :

(a) l'association de A à μ est de la forme (cf **intégrale stochastique**) :

$$(1) \quad \mu(H_t \times \Delta) = E \{ \mathbf{1}(H_t) (X_t^2 - X_s^2) \},$$

avec $A_t = X_t^2$, où $\mathbf{1}_B$ désigne l'**indicatrice** d'une partie B . Autrement dit, $\mu(H_t \times \Delta) = E \{ \mathbf{1}(H_t) \Delta_{st} A \}$, en notant $\Delta_{st} A = A_t - A_s$ (cf **différence finie**) ;

(b) A est un **processus adapté** à la filtration \mathcal{F} précédente ;

(c) la propriété suivante est vérifiée :

$$(2) \quad E \{ \mathbf{1}(H_s) A_s \} = \int_{\Omega \times]0, s]} E \{ \mathbf{1}(H_s) / \mathcal{F}_t^- \} d\mu(\omega, s), \quad \forall H_s \in T,$$

où $\mathcal{F}_t^- = \sigma(\cup_{s < t} \mathcal{F}_s)$ désigne la **tribu** des évènements antérieurs à l' « instant » t , ie la tribu engendrée par la famille $\{\cup_{s < t} \mathcal{F}_s\}_t$ (cf **évènement postérieur**).

On dit aussi que X est un **processus croissant adapté à μ** .