**PROCESSUS DE MARKOV (D1, N2)**
(21 / 11 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

Le processus de MARKOV est un **processus stochastique** étudié dans de nombreux domaines : physique (physique statistique), biologie (biométrie), sociologie (économétrie), etc. Un processus de MARKOV est tq, l'**état « présent »** du processus (ou celui du **système** qu'il décrit) étant donné, son **état « futur »** ne dépend pas de ses états « passés » (**processus « sans mémoire »**).

(i) Soit $X = \{(\Omega, \mathcal{T}, P), (\mathcal{X}, \mathcal{B}), (X_t)_{t \in T}\}$ un processus tq $T \subset \mathbf{R}$.

On dit que X est un **processus de A.A. MARKOV**, ou un **processus markovien**, (au sens strict) ssi, pour toute **suite** finie $(t_1, ..., t_p) \in T^p_< = \{(t_1, ..., t_p) \in T^p \text{ tq } t_1 < ... < t_p\}$ et tout entier $p \in \mathbf{N} \setminus \{1, 2\}$, la relation suivante entre **probabilités conditionnelles** est vérifiée :

(1) $$P([X_{t(p)} \in B] / X_{t(1)}, ..., X_{t(p-1)}) = P([X_{t(p)} \in B] / X_{t(p-1)}), \qquad \forall B \in \mathcal{B}.$$

(ii) On montre que :

(a) X vérifie la **propriété de MARKOV**, ie :

(2) $$E(\eta / (X_s)_{s \leq t}) = E(\eta / X_t), \qquad \forall t \in T \ (P\text{-p.s.}),$$

pour toute **va** $\eta \in \mathcal{L}_{\mathcal{X}}^1(\Omega, \mathcal{T}, P)$ ;

(b) les **probabilités de transition** suivantes, associées à X, vérifient l'**équation de D.G. CHAPMAN - A.N. KOLMOGOROV** :

(3) $$P([X_t \in B] / X_r) = E(P([X_t \in B] / X_s) / X_r), \qquad (P\text{-p.s.}),$$

$\forall B \in \mathcal{B}$ et $\forall (r, s, t) \in T^3_<$ .

(iii) Lorsque $\mathcal{X}$ est un ensemble (au plus) dénombrable, muni de sa **tribu discrète**, les définitions précédentes se transposent : on parle alors de **chaîne de MARKOV**.
Dans ce cas, on a souvent $\mathcal{X} \subset \mathbf{N}$ (ou $X \subset \mathbf{Z}$) (ou leurs puissances cartésiennes).

(iv) Diverses extensions ont été définies, notamment celle où T est un ensemble totalement ordonné (eg muni de la **tribu borélienne** associée à la **topologie** de l'ordre) (cf **relation d'ordre**).