PROCESSUS DE POISSON (C7, N2)
(10 / 06 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

Un **processus de POISSON** est un **processus de renouvellement**. On en présente des définitions alternatives.

Soit X = {(Ω, $\mathcal{T}$, P), ($\mathcal{X}$, $\mathcal{B}$), $(X_t)_{t \in T}$} un **processus stochastique**.

(i) On dit que X est un **processus de S.D. POISSON** ssi :

(a) X est à **espace d'état** discret (ie $\mathcal{X}$ = **N**) et à **ensemble** du **temps** continu (ie T = **R** ou T = $\mathbf{R}_+^*$) ;

(b) X est un **processus à accroissements indépendants** ;

(c) les accroissements $\Delta_{st} = X_t - X_s$ (ie proprement variations) de X vérifient :

(1) $\Delta_{st} \sim \mathcal{P}(\lambda\,(s, t)), \quad \forall\,(s, t) \in T^2_<$,

loi de POISSON tq $(s, t) \mapsto \lambda\,(s, t) = \alpha\,(t - s)$, avec $\alpha > 0$.

(ii) On dit que X est un **processus de S.D. POISSON (ponctuel)** de paramètre $\theta > 0$ sur $\mathbf{R}_+$ ssi (cf aussi **processus ponctuel**) :

(a) X est à espace d'états continu positif (ie $\mathcal{X}$ = $\mathbf{R}_+$) et en temps discret (ie T = **N***) ;

(b) la **famille** $(X_t)_{t \in T}$ des **va** constituant X est une **suite** croissante ;

(c) la suite $(\Delta X_t)_{t \in T}$ des accroissements $\Delta X_t = X_{t+1} - X_t$ de X (avec $\Delta X_0 = X_1$) est une **suite iid** selon la **loi exponentielle** de **densité** :

(2) $f(x) = \mathbf{1}_{\mathbf{R}_+}(x)\,.\,\theta\,e^{-\theta x}, \qquad \forall\,x \in \mathbf{R}.$

(iii) On dit que X est un **processus de S.D. POISSON (non homogène)** commençant au point $t_0 \in T$ (aussi noté t(0)) ssi :

(a) X est à espace d'états discret (ie $\mathcal{X}$ = **Z**) et en temps continu (ie T = $\mathbf{R}_+$) ;

(b) X est à accroissements indépendants ;

(c) le **semi-groupe de convolution** $(Q_\tau)_{\tau \in T}$ qui lui est associé sur la **tribu** $\mathcal{B}$ = $\mathcal{B}_\mathbf{Z}$ est défini par une famille de lois de POISSON (cf **produit de convolution**), avec :

(3)
$$Q_0 = \delta_{t(0)} \quad \text{(la loi initiale est une \textbf{loi de DIRAC})},$$
$$Q_\tau = \mathscr{P}(\lambda_{st}) \quad \text{(\textbf{loi de POISSON} de \textbf{paramètre} } \lambda_{st}\text{)},$$

où $\tau = t - s \in \mathbf{R}_+^*$, où $\lambda_{st} = \gamma(t) - \gamma(s)$ et où la fonction $\gamma : T \mapsto \mathbf{R}$ est strictement croissante. La « **trajectoire moyenne** » de X est supposée être une fonction continue $\mu : t \mapsto E\,X_t$ (cf **application continue**) : sa **dérivée** $D\,\mu$ est appelée **(fonction d') intensité** du processus X.

(iv) On dit que X est un **processus de S.D. POISSON (homogène)** ssi :

(a) X est à espace d'états discret (ie $\mathscr{X} = \mathbf{Z}$) et en temps continu (ie $T = \mathbf{R}_+$) ;

(b) X est à accroissements indépendants ;

(c) le semi-groupe de convolution $(Q_\tau)_{\tau \in T}$ qui lui est associé sur la tribu $\mathscr{B} = \mathscr{B}_{\mathbf{Z}}$ est défini par une famille de lois de POISSON, ie :

(4)
$$Q_0 = \delta_0 \text{ (loi initiale de DIRAC)},$$
$$Q_\tau = \mathscr{P}(\alpha\,\tau) \text{ (loi de POISSON de paramètre } \alpha\,\tau\text{)},$$

avec $\alpha > 0$ et $\tau \in \mathbf{R}_+^*$.