

PROCESSUS DE COMPTAGE (C, N2)

(02 / 11 / 2019, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2019)

(i) Soit $(T_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une **suite** strictement croissante de **vars** positives (ie à valeurs dans $\mathbf{R}_+$).

On appelle **nombre d'instants antérieurs** à l'instant $t \in \mathbf{R}_+$ le nombre aléatoire :

$$(1) \quad N_t = \sum_{n \in \mathbf{N}} \mathbf{1}_{[T(n) \leq t]}, \quad \forall t \in \mathbf{R}_+^*,$$

avec $N_0 = 0$ (où $T(n)$ désigne T_n).

On appelle **processus de comptage**, ou **fonction aléatoire de comptage**, le **processus stochastique** $N = (N_t)_{t \in \mathbf{R}_+}$ ainsi défini.

(ii) A titre d'exemple, on montre que le processus de comptage (1) associé à un **processus ponctuel** de POISSON (cf **processus de POISSON**) est un **processus à accroissements indépendants**.

De plus, $\forall (s, t) \in \mathbf{R}_+^2$ tq $s < t$:

$$(2) \quad \Delta_{t-s} N_s = N_t - N_s \sim \mathcal{P}(\theta(t-s)) \quad (\text{loi de POISSON de paramètre } \theta(t-s)).$$

Par suite, $E(\Delta_{t-s} N_s) = \theta(t-s)$.

(iii) Soit $X = (X_t)_{t \in T}$ un processus stochastique en **temps** discret (ie tq eg $T \subset \mathbf{N}$ ou $T \subset \mathbf{Z}$) et soit $B \in \mathcal{B}$ (**tribu de parties** sur l'**espace des états** $\mathcal{X}$ de X) une « région » donnée. Le nombre de fois où le processus apparaît dans la région B avant l'instant $t \in T$ est :

$$(3) \quad N_t = \sum_{s \leq t} \mathbf{1}_{[X(s) \in B]}, \quad \forall t \in T.$$

Ce nombre définit un processus stochastique scalaire entier (ie à variables entières) $N = (N_t)_{t \in T}$ appelé **processus de comptage** associé à X .