

PROCESSUS DE DIFFUSION (N2)

(12 / 04 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

Processus classique défini, dans l'**espace des états**, à l'aide d'une équation différentielle stochastique du premier ordre dotée d'un mouvement brownien.

(i) Soit $X = \{(\Omega, \mathcal{F}, P), (\mathcal{X}, \mathcal{B}), (X_t)_{t \in T}\}$ et $W = \{(\Omega, \mathcal{F}, P), (\mathcal{W}, \mathcal{B}_W), (W_t)_{t \in T}\}$ deux **processus stochastiques** définis sur le même **espace fondamental**.

On dit que $X = (X_t)_{t \in T}$ est un **processus de diffusion** (vectoriel, ie à K dimensions) ssi :

(a) $(\mathcal{X}, \mathcal{B}) = (\mathbf{R}^K, \mathcal{B}(\mathbf{R}^K))$ et $(\mathcal{W}, \mathcal{B}_W) = (\mathbf{R}^L, \mathcal{B}(\mathbf{R}^L))$ (**processus vectoriels**) ;

(b) $T \subset \mathbf{R}$ et $0 \in T$ (eg $T = \mathbf{R}_+ = [0, +\infty[$) (processus en **temps** continu) ;

(c) $W = (W_t)_{t \in T}$ est un **processus du mouvement brownien** (à L dimensions) (ie un **processus de WIENER** dans \mathbf{R}^L) ;

(d) il existe deux **applications mesurables** $f : T \times \mathbf{R}^K \mapsto \mathbf{R}^K$ et $\sigma : T \times \mathbf{R}^K \mapsto M_{KL}(\mathbf{R})$ qui relient X et W selon l'**équation différentielle stochastique** suivante, parfois appelée **équation de K. ITO** :

$$(1) \quad \begin{aligned} dX_t &= f(t, X_t) dt + \sigma(t, X_t) dW_t, \quad \forall t \in T \setminus \{0\}, \\ X_0 &= x_0 \text{ (donné)}. \end{aligned}$$

Les fonctions f (connue) et σ sont supposées suffisamment régulières pour que (1) admette une solution (**trajectoire**) en X, et que cette solution soit unique. Ainsi, on suppose souvent que f est continue pr à son premier argument ou que la solution appartient à $\mathcal{C}(T, \mathbf{R}^K)$ (ensemble des fonctions continues de T dans \mathbf{R}^K) (cf **application continue**).

(ii) Une interprétation usuelle est la suivante. On écrit (1) sous la forme (cf eg **fonction de régression, modèle de régression**) :

$$(2) \quad dX_t / dt = f(t, X_t) + \sigma(t, X_t) (dW_t / dt), \quad \forall t \in T \setminus \{0\}.$$

Alors, les variations (« temporelles ») de X admettent :

(a) une **moyenne** égale à $f(t, X_t)$, qui représente un **paramètre de « tendance »** ou un **paramètre de « dérive »** (ou encore un **coefficient de tendance** ou un **coefficient de dérive**) ;

(b) une **fonction de covariance** (matricielle) de la forme $(\sigma(t, X_t)) (\sigma(t, X_t))'$. Cette dernière représente un « **paramètre de diffusion** » (ou un **coefficient de diffusion**). Elle est souvent supposée se réduire à la matrice unité I_K .

(iii) En particulier, un **modèle de processus** associé à (1) (ou à (2)) peut s'écrire sous la forme :

$$(3) \quad dX_t = f(X_t, \theta) dt + dW_t, \quad \forall t \in T, \forall \theta \in \Theta,$$

dans laquelle f est donnée et θ est un **paramètre d'intérêt**.

Si l'on dispose d'**observations** $(X_{t(0)}, \dots, X_{t(N)})$ (où $t(p)$ désigne $t_p \in T, \forall p \in \mathbb{N}^*$) (cas discret) ou $(X_t)_{t \in U}$ (avec $U \subset T$) (cas continu), on peut chercher à estimer θ .

Dans le cas où f est linéaire pr à θ (ie bilinéaire pr à (X_t, θ)) et où $\Theta = \mathbf{R}^Q$, l'équation (3) devient :

$$(4) \quad dX_t = X_t' \theta dt + dW_t, \quad \forall t \in T, \forall \theta \in \mathbf{R}^Q,$$

avec $X_0 = x_0$ (donné). L'**estimateur du maximum de vraisemblance** de θ est alors de la forme (eg dans le cas continu) :

$$(5) \quad \theta_T \sim = \int_T X_t (dX_t)' \left(\int_T X_t X_t' dt \right)^{-1}.$$

(iv) L'équation (1) suppose X et W en temps continu. On peut définir aussi un **processus de diffusion** en temps discret (eg $T = \mathbf{Z}$) selon :

$$(6) \quad \Delta X_t = f(t, X_t) + \sigma(t, X_t) \cdot \Delta W_t, \quad \forall t \in T.$$

Un tel processus est un **processus autorégressif** (non linéaire).

(iv) En physique, le **phénomène de diffusion** dans un espace ambiant consiste en un flux d'**unités statistiques** (eg **unités expérimentales** : atomes, électrons, calories, etc) d'une région / zone à forte « concentration » vers une région / zone à faible concentration.

Les **lois de Adolph FICK** constituent des équations fondamentales (1855) des phénomènes de diffusion :

(a) la **première loi de A. FICK** décrivant ce phénomène s'explicite, sous sa forme élémentaire, selon :

$$(7) \quad J = - \delta (dC / dx) = - \delta \cdot \text{Grad}_x C,$$

où J est le « flux de diffusion », δ le coefficient de diffusion, C la concentration du milieu et x la distance. Il y a donc proportionnalité entre le **gradient** de la concentration et un vecteur représentant le flux précédent. Ce flux est défini comme le nombre d'unités statistiques (eg quantité de matière) traversant, par unité de temps, l'unité d'aire d'une surface normale au flux. Le signe négatif signifie que le flux est de direction opposée à celle du gradient dC / dx de la concentration ;

(b) la **seconde loi de A. FICK**, de la forme :

$$(8) \quad \partial C / \partial t = \delta \cdot (\partial^2 C / \partial x^2),$$

décrit la variation de concentration en fonction du temps t et de la position (ou **état**) x .
A l'équilibre, la concentration ne varie plus en fonction du temps t (ie $\partial C / \partial t = 0$),
d'où $\partial^2 C / \partial x^2 = 0$.

Ces deux lois décrivent ainsi des principes fondamentaux de diffusion dans des milieux physiques, susceptibles d'adaptations à d'autres domaines : diffusion de bactéries (biologie), de populations animales ou végétales (écologie), d'innovations (économie), etc.