

PROCESSUS DE MOYENNE MOBILE (N2, N3)

(02 / 05 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

Le **processus de moyenne** mobile est un processus basé sur la notion de **moyenne mobile**, ie construit à partir de la moyenne mobile d'un processus donné.

(i) Soit $X = \{(\Omega, \mathcal{F}, P), (\mathcal{X}, \mathcal{B}), (X_t)_{t \in T}\}$ un **processus stochastique**.

On dit que X est un **processus de moyenne mobile d'ordre q** , ou parfois un **processus de E.E. SLUTZKY d'ordre q** , ou simplement une **moyenne mobile d'ordre q** ssi :

(a) $(\mathcal{X}, \mathcal{B}) = (\mathbf{R}, \mathcal{B}_{\mathbf{R}})$ (processus réel scalaire) ;

(b) $T = \mathbf{Z}$ (processus en **temps** discret) ;

(c) il existe un **bruit blanc** $u = (u_t)_{t \in T}$ (ie un processus u tq $E u_t = 0$ et $E u_s u_t = \delta_{st} \sigma^2$, $\forall (s, t) \in T^2$) tq X puisse se représenter par une équation dynamique, dans l'**espace des états** (parfois improprement appelé **espace des temps** ou **espace du temps**), de la forme (**équation de récurrence** stochastique) :

$$(1) \quad X_t = u_t + \beta_1 u_{t-1} + \dots + \beta_q u_{t-q} = \sum_{j=0}^q \beta_j u_{t-j}, \quad \forall t \in T,$$

avec $\beta_j \in \mathbf{R}$, $\forall j \in \mathbf{N}_q^*$, et $\beta_0 = 1$.

On peut exprimer (1) à l'aide de l'**opérateur retard** B selon le polynôme formel suivant :

$$(2) \quad X_t = (1 + \beta_1 B + \dots + \beta_q B^q) u_t = \Psi(B) u_t, \quad \forall t \in T,$$

où Ψ est la fonction polynômiale définie par $\Psi(z) = \sum_{j=0}^q \beta_j z^j$.

Un processus de moyenne mobile d'ordre q est généralement noté :

(a) $X = \text{mm}(q)$, ou $X = \text{MM}(q)$;

(b) ou encore $X \in \mathbf{mm}(q)$ ou $X \in \mathbf{MM}(q)$ (classe des processus de ce type) (en anglais, « moving average » : $X \in \mathbf{ma}(q)$ ou $\mathbf{MA}(q)$).

(ii) On note que :

(a) les **coefficients** $(\beta_i)_{i=1, \dots, q}$ sont parfois précédés du signe - dans (1) ;

(b) si les racines de Ψ sont de module différent de 1, on peut passer de la forme (1) à la **forme inverse**, ou **forme inversée**, suivante :

$$(3) \quad \sum_{k \in \mathbf{Z}} \gamma_k X_{t-k} = u_t, \quad \text{ou} \quad G(B) X_t = u_t, \quad \forall t \in T,$$

où $\sum_{k \in \mathbf{Z}} |\gamma_k| < +\infty$ et G est la série formelle associée à la série numérique $G(z) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} \gamma_k z^k$.

De plus, si les racines de Ψ sont toutes de module strictement supérieur à 1, alors $\gamma_k = 0, \forall k \in \mathbb{Z}^* = \{\dots, -m, \dots, -2, -1\}$, et l'on dit que X est un **processus inversible**. On peut d'ailleurs toujours se ramener à ce cas si les modules des racines de Ψ sont seulement différents de 1. Cette hypothèse est souvent implicite ;

(iii) On établit les propriétés suivantes :

(a) tout **processus stationnaire en covariance** possédant une **densité spectrale** peut être approximé, dans L^2 et uniformément sur $T = \mathbb{Z}$, par un processus de moyenne mobile ;

(b) un processus stationnaire en covariance est un processus de moyenne mobile ssi sa densité spectrale est absolument continue pr à la **mesure de LEBESGUE** (cf **fonction absolument continue**) ;

(c) si $X \in \mathbf{mm}(q)$, alors X est stationnaire en covariance.

(ii) La notion peut aussi se présenter sous une forme légèrement différente. Soit $X = \{(\Omega, \mathcal{F}, P), (\mathbf{C}, \mathcal{B}_{\mathbf{C}}), (X_t)_{t \in T}\}$ un processus complexe scalaire.

On dit que X est un **processus de moyenne mobile** ssi :

(a) lorsque X est en temps discret ($T = \mathbb{Z}$), il existe un processus en temps discret $v = (v_t)_{t \in T}$ et une suite complexe $c = (c_t)_{t \in T}$ tq :

(a₁) les v_s et v_t sont des **variables orthogonales**, $\forall (s, t) \in T^2_{\neq} = \{(s, t) \in T^2 \text{ tq } s \neq t\}$, avec $E v_s \bar{v}_t = \delta_{st}$;

(a₂) X est stationnaire en covariance ;

(a₃) X vérifie l'égalité (dans l'espace des états) suivante :

$$(4) \quad X_t = \sum_{\tau \in \mathbb{N}} c_{\tau} v_{t+\tau}, \quad \forall t \in T,$$

avec $\sum_{\tau \in \mathbb{N}} |c_{\tau}|^2 < +\infty$. Cette égalité (4) s'entend au sens où la $v_a X_t$ est **limite en moyenne quadratique** de la série définie par le second membre (cf **convergence en mq**) ;

(b) lorsque X est en temps continu ($T = \mathbb{R}$), il existe une fonction mesurable $c : T \mapsto \mathbf{C}$ et un processus en temps continu $v = (v_t)_{t \in T}$ tq :

(b₁) v est un **processus à accroissements orthogonaux**, avec $E |dv_{\tau}|^2 = d\tau, \forall \tau \in T$;

(b₂) X est stationnaire en covariance ;

(b₃) X vérifie l'égalité (dans l'espace des états) suivante :

$$(5) \quad X_t = \int_{\mathbb{R}} c(\tau) dv_{t+\tau} = \int_{\mathbb{R}} c(\tau - t) dv_{\tau}, \quad \forall t \in T,$$

avec $\int_{\mathbb{R}} |c(\tau)|^2 d\tau < +\infty$.

(iii) On étend la notion de processus de moyenne mobile de type scalaire en une notion de type vectoriel, les coefficients β étant remplacés par des **matrices** ad hoc.