PROCESSUS DE NAISSANCE ET DE MORT (N2)
(24 / 04 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

Ce nom significatif **processus de naissance et de mort** provient de l'étude probabiliste (W. FELLER, etc) de l'évolution d'un **ensemble** d'**unités statistiques** dont la cardinalité est variable au cours du **temps**. Il peut s'agir eg d'une **population** constituée de corps célestes, de personnes physiques, d'organismes biologiques, d'espèces écologiques, etc.

Ces unités possèdent, en effet, une **propriété de division**, ou encore une **propriété de reproduction**, ou une **propriété de répétition**, ou une **propriété de disparition** (cf **durée de vie**), etc.

La description d'un ensemble de ce type s'effectue souvent à l'aide de processus stochastiques adaptés. En articulier, ceux de naissance et de mort peuvent être présentés selon trois approches complémentaires.

Soit X = $\{(\Omega, \mathscr{T}, P), (\mathscr{X}, \mathscr{B}), (X_t)_{t \in T}\}$ un **processus stochastique**.

(i) On dit que X est un **processus de naissance et de mort**, ou un **processus de naissance et de décès**, ou encore un **processus d'apparition et de disparition**, ssi X est une **chaîne de MARKOV** tq :

(a) $\mathscr{X}$ est un intervalle Z de **Z** possédant au moins deux éléments (Card Z $\geq$ 2) ;

(b) X est en **temps** discret (eg T = **N**) ;

(c) la **matrice de transition** P de la chaîne vérifie, $\forall$ (x, y) $\in \mathscr{X}^2$, la **propriété de C.G.J. JACOBI** suivante :

$|x - y| > 1 \Rightarrow P_{xy} = 0,$

(1) $|x - y| = 1 \Rightarrow P_{xy} > 0,$

$|x - y| < 1 \Rightarrow P_{yx} = P_{xy}$ (quelconque).

(ii) On dit que X est un **processus de naissance et de mort** ssi X est un **processus de MARKOV** tq :

(a) l'**espace des états** $\mathscr{X}$ de X est dénombrable (eg $\mathscr{X}$ = **N**) (cf **ensemble dénombrable**) ;

(b) X est en temps continu (eg T = $\mathbf{R}_+$) ;

(c) la **matrice de transition** P (t) de X vérifie, $\forall$ x $\in \mathscr{X} \setminus \{0\}$, la propriété suivante :

$p_{x,x+1}(t) = \alpha_x \cdot t + o(t)$ (sur-diagonale),

(2) $p_{x,x-1}(t) = \beta_x \cdot t + o(t)$ (sous-diagonale),

$p_{xx}(t) = 1 - (\alpha_x + \beta_x) \cdot t + o(t)$ (diagonale),

où o (t) désigne la notation « petit zéro » mathématique usuelle (ie $o(t) / t \to 0$ lorsque $t \to 0+$), et où, $\forall x \in \mathscr{X}$, $\alpha_x > 0$ est appelé **taux de naissance** ou **taux d'apparition** (etc) et β_x est appelé **taux de décès** ou **taux de disparition** (etc) (avec $\beta_0 \geq 0$ et $\beta_x > 0$, $\forall x \in \mathscr{X} \setminus \{0\}$).

(iii) En particulier, si $\beta_x = 0$, $\forall x$, on définit ainsi un **processus de naissance pur** ; si $\alpha_x = 0$, $\forall x$, on définit un **processus de mort pur**. Si α_x (resp β_x) dépend de $t \in T$, on dit que X est un **processus de N & M non homogène** ; sinon, il est dit homogène (cf aussi **processus homogène**).

Par construction, un processus de naissance pur (resp de mort pur) ne peut être que non décroissant (resp non croissant).

A titre d'exemple, si $\alpha_x = \alpha \cdot x$ (homothétie), $\forall x$, on définit un **processus de naissance à taux linéaire** α, appelé **processus de W. FURRY** ou **processus de G.U. YULE**.

(iii) On dit encore que X est un **processus de naissance et de mort** ssi :

(a) l'espace des états $\mathscr{X}$ est dénombrable (eg $\mathscr{X}$ = **N**) ;

(b) X est en temps continu (eg T = $\mathbf{R}_+$) ;

(c) si l'on note X_t le cardinal de l'**ensemble** (eg la taille de la **population**) considéré(e) qui varie au cours du temps et :

(3) $p_x(t) = P([X_t = x])$, avec $p_0(0) = 0$,

la **loi** propre de X_t à l'instant $t \in T$, alors $p_x(t)$ est déterminée comme suit. Pour tout $x \in \mathbf{N}^*$, l'**événement** $[X_{t+dt} = x]$ est réalisé dans l'un des trois cas suivants :

(c_1) ou bien X_t ne varie pas entre t et t + dt, ie $X_\tau = x$, $\forall \tau \in [t, t+dt[$. On pose alors :

(4) $P([X_{t+dt} - X_t = 0] / [X_t = x]) = \varepsilon_x(dt)$, $\forall x \in \mathscr{X}$,

avec $\lim_{dt \to 0} \varepsilon_x(dt) / dt = 0$;

(c_2) sachant que X_t était égal à x - 1 à l'instant t, il augmente d'une unité entre t et t + dt, ie $X_t = x - 1$ et $X_{t+dt} - X_t = 1$. On pose alors :

(5) $P([X_{t+dt} - X_t = 1] / [X_t = x]) = \alpha_x \cdot dt + \varphi_x(dt)$, $\forall x \in \mathscr{X}$,

avec $\lim_{dt \to 0} \varphi_x (dt) / dt = 0$;

(c_3) sachant que X_t était égal à x + 1 à l'instant t, il diminue d'une unité entre t et t + dt, ie $X_t = x + 1$ et $X_{t+dt} - X_t = - 1$. On pose alors :

(6) $\quad P ([X_{t+dt} - X_t = - 1] / [X_t = x]) = \beta_x \, dt + \psi_x (dt), \qquad \forall x \in \mathscr{X} \setminus \{0\}$,

avec $\lim_{dt \to 0} \psi_x (dt) / dt = 0$.

L'**équation de récurrence** :

(7) $\quad p_x (t+dt) = A_x (dt) . p_{x-1} (t) + B_x (dt) . p_x (t) + C_x (dt) . p_{x+1} (t)$,

dans laquelle :

$\quad A_x (dt) = \alpha_{x-1} . dt$,

(8) $\quad B_x (dt) = 1 - \alpha_x . dt - \varphi_x (dt) - \beta_x . dt - \psi_x (dt)$,

$\quad C_x (dt) = \beta_{x+1} . dt$,

permet ainsi de calculer $p_x (t)$.

Lorsque $dt \to 0$, {(7),(8)} devient une équation intégro-différentielle de la forme :

(9) $\quad p_x' (t) = \alpha_{x-1} . p_{x-1} (t) - (\alpha_x + \beta_x) . p_x (t) + \beta_{x+1} . p_{x+1} (t)$.

(iv) Des exemples élémentaires, correspondant à cette dernière définition, sont les suivants :

(a) si $\alpha_x = \alpha$ (constante) et $\beta_x = 0$, $\forall x \in \mathscr{X}$, on obtient $p_x (t) = (\alpha . t)^x . e^{- \alpha t} / (x !)$, ie $X_t \sim \mathscr{P} (\alpha . t)$ (**processus de POISSON** d'**intensité** α) ;

(b) si $\alpha_x = \alpha . x$ et $\beta_x = 0$, $\forall x \in \mathscr{X}$, on obtient (en supposant que $X_0 = x_0 \geq 1$) un **processus de G.U. YULE** (processus de naissance pure, ie sans décès) :

(10) $\quad p_x (t) = C_{x-1}^{x - x(0)} . e^{- x(0) \alpha t} . (1 - e^{- \alpha t})^{x - x(0)}, \qquad \forall x \geq x_0$.

Par suite, $E X_t = x_0 . e^{\alpha t}$ et $V X_t = x_0 . e^{\alpha t} (e^{\alpha t} - 1)$;

(c) si $\alpha_x = (1 + \alpha . x) / (1 + \alpha . t)$, avec $\alpha \in \mathbf{R}$ (**constante**), on définit un **processus de G. POLYÀ**.