PROCESSUS DIFFÉRENTIABLE (N2)
(21 / 11 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

De même qu'en analyse mathématique on définit la **dérivée** d'une fonction (en particulier, la dérivée d'une fonction dont l'argument est le « temps »), de même la **théorie des processus** conduit à définir une notion de dérivée pour un processus, une adaptation de nature probabiliste étant alors nécessaire.

(i) Soit X un **processus** à **espace d'état** $(\mathcal{X}, \mathcal{B}) = (\mathbf{R}^K, \mathcal{B}(\mathbf{R}^K))$ et en **temps** continu $T \subset \mathbf{R}$. On définit, sur la **famille** $(X_t)_{t \in T}$ des **va** définissant X, un mode de **convergence stochastique** (noté eg st.).

On dit que alors X est un **processus différentiable** ssi, selon le mode de convergence st. considéré, il existe un processus $Y = (Y_t)_{t \in T}$, défini sur le même **espace probabilisable** de base $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ que X, et tq :

(1) $\quad \text{st.} \lim_{s \to t,\, s \in T} (X_t - X_s) / (t - s) = Y_t, \qquad \forall\, t \in T.$

Plus généralement, si $\mathcal{X}$ et T sont des **espaces normés** (chacun étant rendu mesurable à l'aide de la **tribu borélienne** associée à sa **topologie**), on dit que X est un **processus différentiable** ssi il existe un processus Y, défini sur le même espace de base que X, et tq :

(2) $\quad \text{st.} \lim_{||t - s|| \to 0,\, (s, t) \in T2} (X_t - X_s) / ||t - s|| = Y_t, \qquad \forall\, t \in T$

(où T2 désigne T^2).

Pour tout $t \in T$, on note Y_t selon X_t' ou selon dX_t / dt. Le processus Y est alors noté $X' = (X_t')_{t \in T}$.

On dit que Y est la **dérivée** (ou **st.-dérivée**) de X (à ne pas confondre avec la notion de **processus dérivé**).

(ii) En pratique, les principaux modes de convergence stochastique considérés sont : la **convergence en moyenne quadratique** (st. = L^2), la **convergence en probabilité** (st. = P ou st. = plim) et la **convergence presque sûre** (st. = P-p.s.).