

PROCESSUS DU MOUVEMENT BROWNIEN (C7, N2)

(03 / 05 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

Le **processus du mouvement brownien** a été découvert par L.J.B.A. BACHELIER et étudié notamment par R. BROWN (botaniste anglais) et N. WIENER.

Soit $X = \{(\Omega, \mathcal{F}, P), (\mathcal{X}, \mathcal{B}), (X_t)_{t \in T}\}$ un **processus stochastique** et $\mathcal{I}(\mathbf{R})$ l'**ensemble** des intervalles de $\mathbf{R}$.

(i) On dit que X est un **processus du mouvement brownien**, ou un **processus de R. BROWN**, ou un **processus de N. WIENER**, ou encore un **processus de P.P. LÉVY - N. WIENER**, ou parfois un **processus de L.J.B.A. BACHELIER**, dans $\mathbf{R}$ (ie à 1 dimension) ssi :

(a) X est à **espace d'état** réel scalaire (ie $\mathcal{X} = \mathbf{R}$) et en **temps** continu (ie $T = \mathbf{R}_+$ ou $T = \mathbf{R}$) ;

(b) les accroissements $\Delta_{st} = X_t - X_s$ sont, $\forall (s, t) \in T^2$, indépendants et gaussiens, avec :

$$(1) \quad \Delta_{st} \sim \mathcal{N}_1(0, \sigma^2 |t - s|) \quad (\text{loi normale centrée}),$$

où $\sigma > 0$ est appelé **paramètre** de X .

(ii) On dit aussi que X est un **processus du mouvement brownien** (à 1 dimension) ssi :

(a) X est à espace d'états $\mathcal{X} = \mathbf{R}$ et en temps continu $T = [0, 1]$;

(b) X est un **processus du second ordre** (ie $E \|X\|_\infty^2 < +\infty$, avec $\|X\|_\infty = \sup_{t \in T} |X_t|$), centré (ie $E X_t = 0, \forall t \in T$), à **trajectoires** continues (ie $t \mapsto X_t \in \mathcal{C}_\mathbf{R}(T)$) et continu en moyenne quadratique (cf **processus continu dans L^p** , avec $p = 2$). On suppose, de plus, que $X_0 = 0$;

(c) la **fonction d'autocovariance** $\gamma : T^2 \mapsto \mathbf{R}$ de X est tq :

$$(2) \quad (s, t) \in T^2 \mapsto \gamma(s, t) = C(X_s, X_t) = \inf(s, t) \text{ (aussi noté } s \wedge t).$$

On montre alors que la continuité en moyenne quadratique de X équivaut à la continuité (ordinaire) de γ sur T^2 ;

(d) la **loi** de X (ie ici la loi commune à la famille des X_t) est gaussienne.

Sous certaines conditions, on montre qu'il existe une base trigonométrique dans laquelle X se décompose selon la **formule de décomposition de N. WIENER** :

$$(3) \quad X_t = t \xi_0 + \sum_{n \in \mathbf{N}^*} (S_n \cdot \xi_n + C_n \cdot \eta_n), \quad \text{P-p.s.,}$$

où $S_n = (2^{1/2} \pi n)^{-1} \sin(2 \pi n t)$, $C_n = (2^{1/2} \pi n)^{-1} \{\cos(2 \pi n t) - 1\}$, et la suite aléatoire $(\xi_n)_{n \in \mathbf{N}}$ vérifie une condition de **martingale** :

$$(4) \quad E(\xi_{n+1} / \xi_1, \dots, \xi_n) = 0, \quad \text{P-p.s.}, \quad \forall n \in \mathbf{N}.$$

(iii) On dit que X est un **processus du mouvement brownien** dans $\mathbf{R}^K$ (ou à K dimensions) ssi :

(a) X est en temps continu (ie $T \in \mathcal{J}(\mathbf{R})$) et son espace d'états est un **espace vectoriel** réel (ie $\mathcal{X} = \mathbf{R}^K$) ;

(b) X est un **processus à accroissements indépendants** ;

(c) il existe $\sigma > 0$ tq, $\forall (s, t) \in T^2_{<}$:

$$(5) \quad \Delta_{st} = X_t - X_s \sim \mathcal{N}_K(0, (t - s) \sigma^2 I_K)$$

(loi normale multidimensionnelle centrée).

Ainsi, $E \Delta_{st} = 0$ et $E \|\Delta_{st}\|^2 = \sigma^2 (t - s)$, avec $\|x\|^2 = \sum_{k=1}^K x_k^2$;

(d) les trajectoires $t \mapsto X_t(\omega)$ (où ω parcourt Ω) de X sont P-p.s. continues, $\forall t \in T$.

On dit que X est un **processus normalisé** en t_0 (aussi noté $t(0) \in T$) ssi, en outre, il vérifie :

$$(6) \quad \begin{aligned} X_{t(0)} &= 0 \text{ (P-p.s.)}, \\ \sigma^2 &= 1. \end{aligned}$$

La définition (5) se généralise en remplaçant la **matrice** scalaire $\sigma^2 \cdot I_K$ par une **matrice définie positive** Σ .

(iv) On dit encore que X est un **processus du mouvement brownien** dans $\mathbf{R}^K$ ssi :

(a) X est à espace d'états $\mathcal{X} = \mathbf{R}^K$ et en temps continu (ie $T = \mathbf{R}_+$) ;

(b) on peut associer à X un **semi-groupe de convolution** $(Q_\tau)_{\tau \in T}$ défini sur $\mathcal{B}(\mathbf{R}^K)$ selon (cf **convolution**, **produit de convolution**) :

$$(7) \quad Q_t(B) = (2 \pi \tau)^{-K/2} \int_B \exp \{- (\|x\| / \tau)^2\} d\lambda_K(x), \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^K),$$

avec pour loi initiale $Q_0 = \delta_0$ (**loi de DIRAC** à l'origine).

(v) On montre qu'un processus du mouvement brownien est :

(a) un **processus gaussien** à accroissements stationnaires, dont les trajectoires $t \mapsto X_t$ sont P-p.s. à variations non bornées (cf **fonction à variation bornée**) ;

(b) une martingale ;

(c) un **processus de MARKOV**.

(vi) Un exemple de processus du mouvement brownien est le **processus de ORNSTEIN-UHLENBECK**.