PROCESSUS DU SECOND ORDRE (A5, N2)
(19 / 06 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

Un **processus du second ordre** est un processus stochastique souvent utilisé, notamment en raison de ses propriétés mathématiques simples, ou en relation avec la **loi normale** (**processus gaussien**).

(i) Soit X = $\{(\Omega, \mathcal{T}, P), (\mathcal{X}, \mathcal{B}), (X_t)_{t \in T}\}$ un **processus** tq $\mathcal{X}$ est un **espace de BANACH** (réel) (eg $\mathcal{X} = \mathbf{R}^K$), muni de sa **tribu borélienne** $\mathcal{B}$.

On dit que X est un **processus du second ordre** ssi les **va** X_t sont toutes de carré intégrable, ie :

$$(1) \qquad E\,||X_t||^2 < +\infty, \qquad \text{ou encore} \qquad X_t \in \mathcal{L}_{\mathcal{X}}^2\,(\Omega, \mathcal{T}, P), \ \forall\, t \in T.$$

Plus généralement, X est un **processus d'ordre p** > 1 ssi :

$$(2) \qquad E\,||X_t||^p < +\infty, \qquad \text{ou encore} \qquad X_t \in L_{\mathcal{X}}^p\,(\Omega, \mathcal{T}, P), \ \forall\, t \in T.$$

On considère généralement des classes de va tq X_t dans les définitions précédentes. Ainsi, on écrit plutôt $X_t \in L_{\mathcal{X}}^2\,(\Omega, \mathcal{T}, P)$, $\forall\, t \in T$.

De même, on dit que :

(a) X est un **processus du second ordre** ssi, $\forall\,(t_1, ..., t_N) \in T^N$ et $\forall\, N \in \mathbf{N}^*$, on a $(X_{t(1)}, ..., X_{t(N)}) \in L_{\mathcal{X}(N)}^2\,(\Omega, \mathcal{T}, P)$ (en notant t(n) pour désigner t_n et $\mathcal{X}(N)$ pour désigner $\mathcal{X}^N$). On note alors $X \in L_{\mathcal{X}(T)}^2$;

(b) X est un **processus d'ordre p > 1** ssi, $\forall\,(t_1, ..., t_N) \in T^N$ et $\forall\, N \in \mathbf{N}^*$, on a $(X_{t(1)}, ..., X_{t(N)}) \in L_{\mathcal{X}(N)}^p\,(\Omega, \mathcal{T}, P)$) (en notant toujours t(n) pour t_n et $\mathcal{X}(N)$ pour $\mathcal{X}^N$). On note donc $X \in L_{\mathcal{X}(T)}^p$.

(ii) X étant un processus du second ordre, on étudie souvent le **processus centré** (cf **variable centrée**) pr à l'**espérance mathématique** :

$$(3) \qquad C = (C_t)_{t \in T}, \qquad \text{avec} \quad C_t = X_t - E\,X_t, \qquad \forall\, t \in T.$$

Par suite, $E\,C_t = 0$, $\forall\, t \in T$, ce qui se note aussi $E\,C = 0$, et $V\,X_t = E\,C_t\,C_t'$.

Lorsque $\mathcal{X} = \mathbf{R}^K$, ceci permet de définir la **fonction d'autocovariance**, ou **fonction de covariance** $\gamma : T^2 \mapsto M_K(\mathbf{R})$ de X, ie (cf) :

$$(4) \qquad \gamma\,(s, t) = C\,(X_s, X_t) = E\,C_s\,C_t', \qquad \forall\,(s, t) \in T^2.$$

En particulier, lorsque X est un **processus stationnaire en covariance**, (4) se simplifie :

(5) $\gamma(\theta) = C(X_t, X_{t-\theta}) = E\, C_{t-\theta} C_t'$, $\forall (t, \theta) \in T^2$.

(iii) Enfin, lorsque $\mathcal{X}$ est un espace de BANACH complexe, les définitions peuvent s'étendre, la fonction de covariance s'écrivant (eg lorsque $\mathcal{X} = \mathbf{C}^K$) :

(6) $\gamma(s, t) = C(X_s, X_t) = E\, C_s C_t^*$, $\forall (s, t) \in T^2$,

où a* désigne le vecteur adjoint (ou transconjugué) de $a \in \mathbf{C}^K$ (ie $a^* = \bar{a}'$).