PROCESSUS GAUSSIEN (C7, N2)
(20 / 11 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

(i) Soit $X = \{(\Omega, \mathscr{T}, P), (\mathscr{X}, \mathscr{B}), (X_t)_{t \in T}\}$ un **processus stochastique**.

On dit que X est un **processus gaussien** ou, parfois, un **processus normal**, (réel scalaire) ssi :

(a) X est réel scalaire (ie $\mathscr{X} = \mathbf{R}$) ;

(b) la **loi conjointe** de la **suite** des va $\{X_{t(1)}, ..., X_{t(N)}\}$, ie la **loi de probabilité** du **vecteur aléatoire** $X(t_1, ..., t_N) = (X_{t(1)}, ..., X_{t(N)})$ est, $\forall (t_1, ..., t_N) \in T^N$ (partie finie de T^N), une **loi normale multidimensionnelle** (à N dimensions) :

$$(1) \qquad \mathscr{L}(X(t_1, ..., t_N)) = \mathscr{N}_N(\mu(t_1, ..., t_N), \Sigma(t_1, ..., t_N)),$$

avec $\mu(t_1, ..., t_N) = E\, X(t_1, ..., t_N)$ et $\Sigma(t_1, ..., t_N) = V\, X(t_1, ..., t_N)$ (où t(n) désigne t_n).

(ii) On montre que, si $\mu : T \mapsto \mathbf{R}$ est une fonction donnée et $\gamma : T^2 \mapsto \mathbf{R}$ une fonction de type positif donnée, il existe un processus gaussien (unique) X tq :

$$(2) \qquad \begin{aligned} \mu(t) &= E\, X_t, & \forall t \in T, \\ \gamma(s, t) &= C(X_s, X_t), & \forall (s, t) \in T^2, \end{aligned}$$

où $C(X_s, X_t)$ désigne la **covariance** entre les va X_s et X_t (cf **fonction d'autocovariance**).

(iii) Les définitions s'étendent directement aux processus complexes et aux processus vectoriels.