PROCESSUS HARMONIQUE (N2, N7)

Deux définitions usuelles peuvent se rapporter à un **processus harmonique** (cf aussi **analyse harmonique**).

Soit X = {(Ω, $\mathcal{T}$, P), ($\mathcal{X}$, $\mathcal{B}$), $(X_t)_{t \in T}$} un processus stochastique.

(i) **Première définition**. On dit que X est un **processus harmonique** ssi :

(a) $\mathcal{X}$ est un **espace normé** réel et X est en **temps** discret (ie **T** = **N**) ;

(b) X est un **processus stationnaire** ;

(c) X vérifie l'**équation de récurrence** linéaire dans l'**espace des états** $\mathcal{X}$ (cf aussi **processus autorégressif**) :

$$(1) \quad \begin{cases} X_0 = x_0 ,\ldots, X_{p-1} = x_{p-1} & \text{(\textbf{conditions initiales})}, \\ b_0\, X_t + b_1\, X_{t-1} + \ldots + b_p\, X_{t-p} = 0, & \forall\, t \in \mathbf{N} \setminus \mathrm{N}_{p-1} , \end{cases}$$

où les grandeurs $x_0 ,\ldots, x_{p-1}$ peuvent être des **variables aléatoires** données.

Lorsque $\mathcal{X}$ = **R**, la solution générale $X^* = (X_t^*)_{t \in T}$ de l'équation (1), mise sous la forme :

$$(2) \qquad \Psi\,(B) = (b_0\, id_{\mathbf{R}} + b_1\, B + \ldots + b_p\, B^p)\, X_t = 0,$$

dans laquelle B désigne l'**opérateur retard**, dépend des racines du polynôme associé $\Psi\,(z) = \Sigma_{j=0}^{p}\, b_j\, z^j$.

En général, X_t^* s'exprime en fonction de ce qu'on appelle alors les **composantes harmoniques** du processus.

(ii) **Seconde définition**. On dit que X est un **processus harmonique**, ou un **processus de J.B.J. FOURIER tronqué**, ssi :

(a) $\mathcal{X}$ = **C** et **T** $\in \mathcal{T}$(**R**) (**famille** des intervalles de **R**) ;

(b) X peut se mettre sous la forme :

$$(3) \qquad X_t = \Sigma_{j=1}^{p}\, A_j \exp\,(i\, \omega_j\, t), \quad \forall\, t \in T,$$

dans laquelle $(A_j)_{j=1,\ldots,p}$ est une **suite** finie de **variables aléatoires** complexes scalaires tq, $\forall$ (j, k) $\in (\mathrm{N}_p^*)^2$:

$$(4)\quad \begin{cases} E\,A_j = 0 & \text{(variables centrées),} \\ C\,(A_j\,,\,A_k) = E\,A_j\,\overline{A}_k = \delta_{jk}\,\sigma^2 & \text{(variables homoscédastiques),} \end{cases}$$

et $|\omega_j| \leq \pi$, $\forall\, j \in N_p^*$ (ici les ω_j désignent des **fréquences** et non pas des éléments de l'ensemble fondamental Ω).

Ce processus vérifie les propriétés suivantes :

(a) sa **trajectoire** moyenne est identiquement nulle (ie $t \mapsto E\,X_t = 0$, $\forall\, t \in T$) ;

(b) sa **fonction d'autocovariance** s'écrit :

$$(5)\quad \theta \mapsto \gamma_\theta = E\,X_t\,\overline{X}_{t-\theta} = \Sigma_{j=1}^{p}\,\sigma_j^2 \exp(i\,\omega_j\,\theta).$$

Elle admet la **représentation spectrale** $\gamma_\theta = \int_{-\pi}^{+\pi} e^{\,i\,\omega\,\theta}\, dF(\omega)$, dans laquelle $F : [-\pi, +\pi] \mapsto [0, \sigma^2]$ désigne la **fonction de(s) sauts** de X, définie par :

$$(6)\quad F\,(\omega) = \Sigma_{j=1}^{p}\,\sigma_j^2\, u\,(\omega - \omega_j),$$

où u est la **fonction de HEAVYSIDE** et $\sigma^2 = V\,X_t = \gamma_0 = \Sigma_{j=1}^{p}\,\sigma_j^2$ désigne la **variance totale** de X.

(iii) On peut étendre la définition (3) au cas où $j \in$ **N*** (processus non tronqué), en remplaçant le second membre par la série correspondante.

La forme (3) (ou son extension) de ce processus constitue une version élémentaire de la **représentation spectrale de CRAMER** pour un processus.