

PROCESSUS INTÉGRABLE (A5, N2, N12)

(09 / 06 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

La notion de **processus intégrable** peut recevoir trois significations. Ces « contenus » correspondent à la notion générale d'**intégrabilité**.

(i) **Processus intégrable** et **intégrale** (au sens de la **théorie de la mesure** et de la **théorie de l'intégration**).

Soit $X = \{(\Omega, \mathcal{F}, P), (\mathcal{X}, \mathcal{B}), (X_t)_{t \in T}\}$ un **processus stochastique** vectoriel dans lequel $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ est un **espace normé** (eg un **espace de BANACH**) et $\|\cdot\|$ désigne la **norme** sur $\mathcal{X}$.

On dit que X est un **processus intégrable** ssi la **famille** $(X_t)_{t \in T}$ est constituée de **va** X_t qui sont toutes intégrables (au sens de l'**espérance**), ie :

$$(1) \quad E \|X_t\| < +\infty, \quad \forall t \in T.$$

La notion peut se généraliser, eg (cf **moyenne**) :

(a) intégrabilité d'ordre $p > 1$, avec $E \|X_t\|^p < +\infty, \forall t \in T$;

(b) φ -intégration, $E \varphi(\|X_t\|) < +\infty, \forall t \in T$.

(ii) **Processus intégrable** et **intégration** (cf **processus intégré**).

Considéré conjointement avec un processus Y de même type, (X, Y) intervient dans la définition de la notion de **cointégration** (cf aussi **processus autorégressif de moyenne mobile intégré**).

(iii) **Processus intégrable** et **intégrale stochastique**.

Soit X un **processus vectoriel** réel (ie $\mathcal{X} = \mathbf{R}^K$) en **temps** continu (avec $T = [a, b] \subset \mathbf{R}$) et st. un **mode de convergence** stochastique (cf **convergence stochastique**).

On dit alors que X est eg un **processus intégrable (au sens de LEBESGUE)** ssi, selon le mode st. considéré, il existe une **va** $Z : \Omega \mapsto \mathbf{R}^K$ tq l'**intégrale** (vectorielle) de LEBESGUE suivante (cf **mesure de LEBESGUE**) :

$$(1) \quad Z = \text{st.} \int_a^b X_t dt \quad (\text{ou } Z = \text{st.} \int_a^b X_t d\lambda_1(t))$$

existe (ie $\|Z\| < +\infty$).

Cette notion d'intégrabilité est relative à l'ensemble T du **temps**.

Si, plus généralement, T est muni d'une **structure mesurable** (ie d'une **tribu de parties** $\mathcal{B}_T$) et si ν est une **mesure positive** définie sur $\mathcal{B}_T$, on définit une notion d'**intégrabilité** plus large sur T . La formule (1) devient alors :

$$(2) \quad Z = \text{st.} \int_T X_t \, d\nu(t).$$