**PROCESSUS PUREMENT ALÉATOIRE (D1, N2)**
(21 / 09 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

La notion de **processus purement aléatoire** se relie à l'idée courante de **phénomène** se déroulant « au hasard » (cf **hasard**, **Statistique et hasard**). Cette notion se réfère, de façon générale, à la génération de valeurs indépendantes entre elles (cf **indépendance stochastique**), soit dans l'**espace**, soit au cours du **temps**, soit dans l'espace-temps. Elle contient, en particulier, le cas où ces valeurs sont, en outre, équidistribuées, ie suivent chacune une même **loi de probabilité** (cf **suite équidistribuée**, **suite indépendante équidistribuée**).

(i) Soit $X = \{(\Omega, \mathscr{T}, P), (\mathscr{X}, \mathscr{B}), (X_t)_{t \in T}\}$ un **processus stochastique**.

On dit que X est un **processus purement aléatoire**, ou **processus à variables mutuellement indépendantes**, ou parfois simplement un **processus indépendant**, ssi (en notant t(n) pour désigner $t_n$) (cf **produit tensoriel**, **indépendance stochastique**) :

$$\mathscr{L}(X_{t(1)}, \dots, X_{t(N)}) = \mathscr{L}(X_{t(1)}) \otimes \dots \otimes \mathscr{L}(X_{t(N)}), \tag{1}$$
$$\forall (t_1, \dots, t_N) \in T^N \text{ et } \forall N \in \mathbf{N}^* \setminus \{1\},$$

où $\mathscr{L}(X_{t(1)}, \dots, X_{t(N)})$ désigne la **loi jointe** de $(X_{t(1)}, \dots, X_{t(N)})$, ie l'image de P par l'application $(X_{t(1)}, \dots, X_{t(N)}) : \Omega \mapsto \mathscr{X}^N$, et où $\mathscr{L}(X_{t(n)})$ désigne la loi (propre) (ie la **loi marginale**) de $X_{t(n)}$ , $\forall n \in N_N^*$.

La même terminologie s'applique au cas où X est une **suite** aléatoire, ie lorsque T est au plus dénombrable (ie soit fini, soit dénombrable) : **suite purement aléatoire**, ou **suite à variables mutuellement indépendantes**, ou encore **suite indépendante**.

(ii) Un problème important est celui du **test** de l'**hypothèse** selon laquelle X est un processus purement aléatoire. Un test de ce type est appelé **test de l'indépendance** (cf **test d'indépendance**), ou **test de l'échantillon aléatoire**, ou même **test de l'aléatoire**, notamment lorsque X est aussi équidistribué (ie $\mathscr{L}(X_{t(n)} = \mathscr{L}(\xi)$ , $\forall N \in \mathbf{N}^* \setminus \{1\}$, où $\mathscr{L}(\xi)$ est une loi donnée).

On peut réaliser ce test à l'aide d'un **échantillon**, ie à l'aide d'une **famille extraite** tq $(X_{t(1)}, \dots, X_{t(N)})$ ou tq $(X_u)_{u \in U}$ (avec $U \subset T$) (« portions » de **trajectoires**).

Dans l'étude des sommes du type :

$$S_N = \Sigma_{n=1}^N X_{t(n)} , \tag{2}$$

la notion de **produit de convolution** joue donc un rôle important.

(iii) Lorsque $\mathscr{L}(X_t) = \mathscr{L}(\xi)$ (loi donnée), $\forall\, t \in T$, ie lorsque les **va** $X_t$ sont des **copies** (indépendantes entre elles) de la **variable parente** $\xi : \Omega \mapsto \mathscr{X}$, on dit que X est un **processus indépendamment** (et) **identiquement distribué**, ou un **processus iid** (piid), ou un **processus équidistribué indépendant** (pei), ou encore un **processus généré**, ou un **processus engendré**, par la va $\xi$.

Un tel processus est un **processus strictement stationnaire**. S'il est réel scalaire (ie $\mathscr{X} = \mathbf{R}$) et en **temps** discret (eg $T = \mathbf{N}$), son **corrélogramme** $(\rho_\theta)_{\theta \in \mathbf{N}}$ est tq $\rho_0 = 1$ et $\rho_\theta = 0$, $\forall\, \theta \neq 0$.

(iv) Lorsque T est (au plus) dénombrable, X est appelé :

(a) **suite indépendante**, ou **suite purement aléatoire**, au lieu de processus purement aléatoire ;

(b) **suite iid**, au lieu de processus iid.

Un **échantillon bernoullien** (ou « **échantillon simple** ») est un exemple de suite iid (généralement finie).