

PROCESSUS RAMIFIANT (N2)

(18 / 03 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

Un processus ramifiant est un type de processus représentant l'évolution d'un **ensemble** dont les éléments peuvent :

(a) soit se diviser (eg mitose, méiose, en biologie) ;

(b) soit se trouver en relation avec d'autres éléments, par « effet de contagion » ou « effet de propagation » (eg transmission épidémiologique).

Il est à distinguer du **processus de diffusion**.

En pratique, l'ensemble considéré est une **population** et ses éléments sont des **unités statistiques**, ou « individus », qui peuvent avoir des « descendants ». C'est la description de cette descendance qui constitue son « **arbre généalogique** », lequel présente donc une **forme ramifiante** (ie en « rameaux »).

Le « modèle d'évolution » décrit par un processus ramifiant s'applique à des **situations statistiques** variées. Ainsi, l'ensemble considéré peut être eg :

(a) (physique) un « gaz » contenu dans un milieu clos, et dont les éléments sont des « molécules », ou encore un « groupe de particules » qui peuvent connaître des « scissions » (mais non des « fusions » ni d' « immigrations », dans les modèles élémentaires) ;

(b) (biologie) certaines formes de reproduction : eg reproduction cellulaire (mitose) ;

(c) (écologie) une population, animale ou végétale, qui se reproduit (de façon monosexuée ou bisexuée), etc ;

(d) (divers domaines) un **processus de diffusion** sans retour (« feedback », etc : ie la diffusion ne revient pas sur une unité déjà mise en relation).

(i) Soit $X = \{(\Omega, \mathcal{F}, P), (\mathcal{X}, \mathcal{B}), (X_t)_{t \in T}\}$, un **processus stochastique**.

On dit que X est un **processus ramifiant**, ou un **processus de ramification**, ou un **processus en cascade**, ou un **processus de réactions en chaîne**, ssi il vérifie les propriétés suivantes (on se limite au cas du « **processus à générations** ») :

(a) X est à **espace d'état** discret (eg $\mathcal{X} = \mathbf{N}$) ;

(b) X est en **temps** discret (eg $T = \mathbf{N}$) ;

(c) chaque **variable aléatoire** X_t désigne, $\forall t \in T$, le **nombre d'unités statistiques** (eg particules, molécules) existant à l'instant $t \in T$ (ou appartenant à la « **génération** » t) ;

(d) chaque unité se reproduit en $x \in \mathbf{N}$ « **exemplaires** » (du même type, ie dotés des mêmes propriétés) avec la probabilité p_x , puit elle « disparaît » (ou « meurt »). Les x exemplaires définissent donc la **génération** d'ordre $t + 1$. On suppose que la distribution $p = (p_x)_{x \in \mathbf{N}}$ est la même pour toute unité, et que les modes de reproduction sont indépendants en probabilité entre les unités (cf **indépendance**) ;

(e) le processus commence (en général) à l'état 1 (ie $X_0 = 1$) (génération d'ordre zéro). Par suite, si le processus est à l'état $X_t = x$ à l'instant $t \in \mathbf{T}$, son état à l'instant $t + 1$ sera la somme de x va iid selon p (cf **suite iid**).

(ii) Le problème principal consiste à étudier la va X_t (taille de la $t^{\text{ème}}$ génération d'unités). Si g_t est la **fonction génératrice** (fg) de X_t :

(a) celle de X_1 est :

$$(1) \quad g_1(u) = \sum_{x \in \mathcal{X}} p_x u^x ;$$

(b) celle de X_t est donnée par l'**équation de récurrence** :

$$(2) \quad g_t(u) = g_1(g_{t-1}(u)) = \sum_{x \in \mathcal{X}} p_t(x) u^x ,$$

expression dans laquelle $p_1(x) = p_x$, $\forall x \in \mathcal{X}$, et $p_t(x) = P([X_t = x])$, $\forall t > 1$ (probabilité que la $t^{\text{ème}}$ génération comporte x unités).

Il y a « **extinction** » à la date t du processus X si l'**état absorbant** $X_t = 0$ est atteint à l'instant t .

Si la génération initiale comporte 1 unité ($X_0 = 1$) et si $p_t(x)$ est la probabilité que la $t^{\text{ème}}$ génération comporte x unités, le **théorème fondamental des processus ramifiants**, ou **théorème critique des processus ramifiants** énonce que la **probabilité d'extinction** (asymptotique) $p_\infty(0) = \lim_{t \rightarrow +\infty} p_t(0)$ est le plus petit point fixe de l'équation en p suivante (cf **théorème du point fixe**) :

$$(3) \quad g_1(p) = p,$$

où g_1 est la **fg** de X_1 précédente (nombre de descendants de l'unité initiale).

En outre, on établit l'équivalence :

$$(4) \quad p_\infty(0) = 1 \Leftrightarrow E X_1 \leq 1.$$

(iii) Si $X = \{(\Omega, \mathcal{F}, P), (\mathcal{X}, \mathcal{B}), (X_t)_{t \in \mathbf{T}}\}$ est un **processus iid** (ie à **va** X_t indépendantes et équidistribuées), à **espace d'état** discret (ie $(\mathcal{X}, \mathcal{B}) = (\mathbf{N}, \mathcal{P}(\mathbf{N}))$) et en **temps** discret $\mathbf{T} = (\mathbf{N}^*)^2$, on peut lui associer un processus ramifiant $Y = (Y_n)_{n \in \mathbf{N}}$ selon :

$$(5) \quad Y_n(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0, \\ \{X_{n,1}(\omega) + \dots + X_{n,n-1}(\omega)\} - Y_n(\omega) & \text{si } n > 1, \end{cases}$$

$\forall \omega \in \Omega$ et $\forall n \in \mathbf{N}$, où l'on note $X_t = X_{ab}$ (avec $t = (a, b)$) et où l'on suppose que $Y_n(\omega) = 0$ si $Y_{n-1}(\omega) = 0$.

Si X_{nb} est le nombre de « **descendants** » d'un organisme biologique (ie vivant), et si Y_{n-1} est la taille, à l'instant $n - 1$, d'une population composée de tels organismes, alors Y_n s'interprète comme la **taille de la population** à l'instant $n + 1$. Par suite, si $E X_{nb} = \mu$ (**constante**), $\forall (n, b) \in T$, on montre que :

$$(6) \quad E(Y_n / Y_{n-1}) = \mu \cdot Y_{n-1}.$$

Le processus $(\mu^{-n} Y_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ est donc une **martingale**.

(iv) Un processus ramifiant élémentaire tq le suivant peut décrire eg une propagation entre unités de même type. Ainsi, dans un processus sans « retour sur unités » :

(a) une unité u_0 « contamine » $N_0 \geq 0$ autres unités $\{u_{11}, u_{12}, \dots, u_{1N(0)}\}$ avec des probabilités resp $\{p_{11}, p_{12}, \dots, p_{1N(0)}\}$ (où $N(0)$ désigne N_0) ;

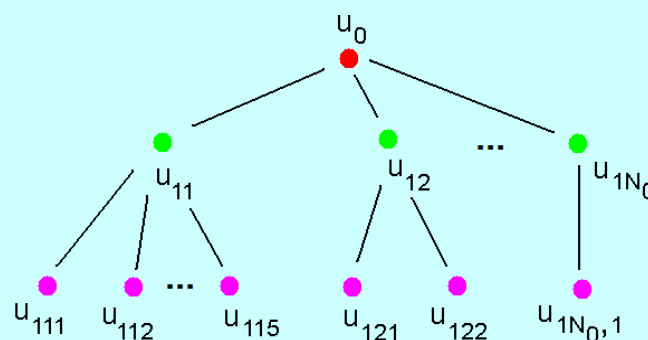
(b) chaque unité précédente (de rang 1) u_{1n} ($n = 1, \dots, N_0$) touche, à son tour, $N_{1n} \geq 0$ autres unités, soit $\{u_{1n,1}, u_{1n,2}, \dots, u_{1n,N(2)}\}$, toutes différentes des unités de rang 1, avec les probabilités resp $\{p_{1n,1}, p_{1n,2}, \dots, p_{1n,N(2)}\}$;

(c) etc.

En cas d'indépendance, la probabilité d'une « chaîne » entre l'unité u_0 et une unité quelconque de rang $r > 0$ est alors égale au produit des probabilités intermédiaires.

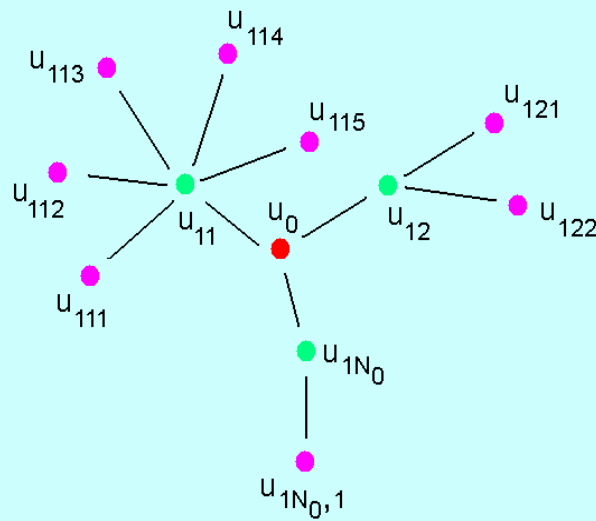
La représentation graphique peut se faire :

(a) soit en forme d'arborescence :



Cette forme permet de prendre en compte des **temps de latence** (eg périodes d'incubation) variables d'une unité à l'autre.

(b) soit en forme d'étoiles (chaque unité « irradie » certaines unités gravitant autour d'elle) :



Cette forme permet de prendre en compte des **répartitions spatiales** plus ou moins espacées entre unités.

Par suite si les évènements précédents sont inscrits dans une échelle de temps T , et si l'on affecte une **variable indicatrice** σ à chaque unité ($\sigma = 1$ si l'unité survit, $\sigma = 0$ sinon), on peut compter, à chaque instant $t \in T$:

- (a) le nombre $N(t)$ d'unités de l'arborescence ;
- (b) parmi les précédentes, le nombre d'unités non survivantes $D(t)$.

D'où s'ensuit la mortalité (léthalité) au cours du temps $\delta(t) = D(t) / N(t)$.