PROCESSUS STATIONNAIRE EN COVARIANCE (C5, N2)
(31 / 03 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

La notion de **processus stationnaire en covariance** définit une classe de processus importante, très étudiée en raison de ses propriétés spécifiques : en particulier, l'**analyse spectrale** ou l'**analyse cospectrale** sont des méthodes d'**analyse dans le domaine des fréquences** qui lui sont particulièrement adaptées.

(i) Soit $X = \{(\Omega, \mathcal{T}, P), (\mathbf{R}, \mathcal{B}_{\mathbf{R}}), (X_t)_{t \in T}\}$ un **processus stochastique** réel scalaire et (T, +) un **groupe** additif abélien. On suppose, sans perte de généralité, que X est centré (processus d'**espérance** nulle), ce qui se note E X = 0 (ie $E X_t = 0, \forall t \in T$).

On dit que X est un **processus stationnaire en covariance**, ou un **processus stationnaire au second ordre**, ou un **processus stationnaire au sens large**, ou encore un **processus faiblement stationnaire**, ssi :

(a) $X_t \in \mathcal{L}_{\mathbf{R}}^2 (\Omega, \mathcal{T}, P), \forall t \in T$;

(b) la fonction :

(1) $\gamma (t, \theta) = C (X_t , X_{t+\theta}) = E X_t X_{t+\theta}$,

définie sur $D = \{(t, \theta) \in T^2 : (t, t+\theta) \in T^2\}$, ne dépend pas de t. On la note alors simplement $\gamma : pr_2 D \mapsto \mathbf{R}$ (autrement dit, la seconde application partielle $\gamma_t : \theta \mapsto \gamma (t, \theta)$ ne dépend pas de $t \in pr_1 D$).

On appelle γ la **(fonction d')autocovariance**, ou la **(fonction de) covariance,** de X (cf **fonction d'autocovariance**, **fonction de covariance**). Elle vérifie, en particulier $V X_t = C (X_t , X_t) = \gamma (0) = \sigma^2$ (**variance** du processus, qui ne dépend pas de t). On note souvent : $\gamma_\theta = \gamma (\theta), \forall \theta \in pr_2 D$.

On appelle **(fonction d')autocorrélation**, ou **(fonction de) corrélation**, de X la fonction $\rho : pr_2 D \mapsto [-1, +1]$ définie selon :

(2) $\rho (\theta) = C (X_t , X_{t+\theta}) / \{\sigma (X_t) . \sigma (X_{t+\theta})\} = \gamma (\theta) / \gamma (0)$,

où $\sigma (X_t) = (V X_t)^{1/2} = \sigma$. On note, de même, $\rho_\theta = \rho (\theta)$.

(ii) Un processus stationnaire en covariance vérifie de nombreuses propriétés :

(a) si X est stationnaire en covariance, γ et ρ sont à la fois des fonctions paires et des **fonctions de type positif** ;

(b) si X est une **suite orthogonale** (ie si $T = \mathbf{N}$ et $E X_s X_t = 0, \forall (s, t) \in T^2_{\neq}$) et si $V X_t = \sigma^2$ ne dépend pas de t, alors X est stationnaire en covariance ;

(c) si X est stationnaire en covariance et si (X_1 ,..., X_T) désigne une **série temporelle** (**observable**), issue de X, un **estimateur** « naturel » r_T de ρ s'écrit :

(3) $$r_T(\theta) = \Sigma_{t=1}^{T-\theta} (X_t - \bar{X}_T)(X_{t+\theta} - \bar{X}_T) / \Sigma_{t=1}^{T} (X_t - \bar{X}_T)^2, \qquad \forall\, \theta \in N_{T-1},$$

où $\bar{X}_T = T^{-1} \Sigma_{t=1}^{T} X_t$ désigne la **moyenne empirique** (cf **statistique naturelle**).

On montre que r_T est un **estimateur strict** de ρ (car $|r_T(\theta)| \leq 1$, $\forall\, \theta \in N_{T-1}$) et que, sous certaines conditions, il est convergent (en probabilité) (cf **convergence en probabilité**) :

(4) $$\text{plim}_T\ r_T(\theta) = \rho(\theta), \qquad \forall\, \theta \in N_{T-1} ;$$

(d) si X est un **processus de moyenne mobile** (ie $X_t = \Sigma_{j \in \mathbf{Z}} \alpha_j u_{t-j}$) tq, à la fois :

(d)$_1$ $E\, u_t = 0$, $C(u_s, u_t) = E\, u_s u_t = \delta_{st}\, \sigma^2$, $\forall\, (s, t) \in \mathbf{Z}^2$;

(d)$_2$ $\Sigma_{j \in \mathbf{Z}} |\alpha_j| < +\infty$,

alors sa fonction d'autocovariance s'écrit sous la forme :

(5) $$\gamma(\theta) = \sigma^2\, \Sigma_{t \in \mathbf{Z}}\ \alpha_t\, \alpha_{t-\theta}, \qquad \forall\, \theta \in \mathbf{Z},$$

et vérifie $\Sigma_{\theta \in \mathbf{Z}} |\gamma(\theta)| < +\infty$;

(e) si X est stationnaire en covariance et si T = $\mathbf{Z}$, on définit la **fonction génératrice des autocovariances** de X selon :

(6) $$g_X(u) = \Sigma_{\theta \in \mathbf{Z}}\ \gamma_\theta\, u^\theta, \qquad \forall\, u \in \mathbf{R}_+,$$

en notant $\gamma_\theta = \gamma(\theta)$.

Par suite, si Y est un processus de moyenne mobile (de « longueur » p + q + 1) défini par :

(7) $$Y_t = \Sigma_{i=-p}^{q}\, \beta_j\, X_{t-j}, \qquad \forall\, t \in \mathbf{Z},$$

on montre que Y est aussi stationnaire au sens large et sa propre fonction génératrice des autocovariances est donnée par :

(8) $$g_Y(u) = (\Sigma_{j=-p}^{q}\, \beta_j\, u^{-j})\, (\Sigma_{k=-p}^{q}\, \beta_k\, u^k) \,.\, g_X(u), \qquad \forall\, u \in \mathbf{R}_+ .$$

(iii) La fonction d'autocovariance γ d'un processus stationnaire en covariance X admet la **représentation spectrale** suivante (cf **représentation spectrale de CRAMER**) :

(9) $$\gamma_\theta = \int_{-\pi}^{+\pi} e^{i\,\theta\,\omega}\, dF(\omega),$$

dans laquelle la **fonction de répartition spectrale** F de X vérifie les trois propriétés suivantes :

(a) $F : [-\pi, +\pi] \mapsto \mathbf{R}_+$ est non décroissante ;

(b) $F(\pi) - F(-\pi) = \gamma_0$;

(c) $F(\omega'') - F(\omega') = F(-\omega') - F(-\omega'')$, $\forall (\omega', \omega'')$ tq F est continue (ie sur le carré de l'**ensemble de continuité** de F).

Si $\Sigma_{\theta \in \mathbf{Z}} |\gamma_\theta| < +\infty$, on en déduit la **densité spectrale** de X :

(10) $f(\omega) = (2\pi)^{-1} \Sigma_{\theta \in \mathbf{Z}} \gamma_\theta e^{-i\theta\omega}, \quad \forall \omega \in [-\pi, +\pi]$.

Enfin, de façon analogue à (8), on établit la relation :

(11) $g(\omega) = |\Sigma_{j=-p}^{q} \beta_j e^{ij\omega}|^2 . f(\omega)$,

où g désigne la densité spectrale de Y.

(iv) Si $X = (X_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ est un processus réel scalaire stationnaire en covariance, avec eg $E X_n = 0$ et $V X_n = 1$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$, alors X vérifie le **théorème ergodique**, ou **théorème « statistique »**, ou encore **théorème dans L^2**, ie sa **moyenne empirique** converge en moyenne quadratique :

(12) $\overline{X}_N = N^{-1} \Sigma_{n=1}^{N} X_n \rightarrow^{L2} \mu$ (cf **convergence en mq**),

où $\mu = \Psi(0)$ et où Ψ est la **mesure spectrale** associée à X, ie tq (cf **intégrale stochastique**) :

(13) $X_n =^{L2} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{inu} \Psi(du)$.

(v) On peut étendre les définitions précédentes. Ainsi :

(a) si X est complexe scalaire (ie $\mathcal{X} = \mathbf{C}$), X est un **processus stationnaire en covariance** ssi :

$(a)_1$ $X_t \in \mathcal{L}_{\mathbf{C}}^2(\Omega, \mathcal{T}, P)$, $\forall t \in T$;

$(a)_2$ sa fonction d'autocovariance s'écrit :

(14) $\gamma(t, \theta) = E X_t \overline{X}_\theta$,

(où $\overline{z}$ désigne le complexe conjugué de $z \in \mathbf{C}$) ne dépend pas de t ;

(b) si X est un **processus vectoriel** réel (ie $\mathcal{X} = \mathbf{R}^K$), on pose :

(15) $\gamma(t, \theta) = E\, X_t\, X_{t+\theta}'$,

où x' désigne le vecteur transposé de $x \in \mathbf{R}^K$;

(c) si X est vectoriel complexe (ie $\mathcal{X} = \mathbf{C}^k$), on pose :

(16) $\gamma(t, \theta) = E\, X_t\, X_{t+\theta}^*$,

où $z^* = \overline{z}'$ désigne le vecteur transconjugué de $z \in \mathbf{C}^K$.

(d) enfin, la définition est formellement inchangée si X est à valeurs matricielles, ie si $\mathcal{X} = M_{KL}(\theta)$ (ev des **matrices** de format (K,L) donné).

Les fonctions d'autocorrélation précédentes ne dépendent donc pas de t.

(vi) Lorsque X est à valeurs dans $\mathbf{C}^K$, on dit aussi que X est un **processus stationnaire en covariance** ssi (outre que γ définie en (16) ne dépend pas de t) (cf **trace**):

(17) $E\, \mathrm{Tr}\,(X_t X_t^*) = \Sigma_{k=1}^{K} \Sigma_{l=1}^{K} |(X_t)_{kl}|^2 < +\infty, \qquad \forall\, t \in T,$

où la somme double concerne les carrés des modules des éléments d'indices (k, l) de X_t .

Un tel processus admet (eg lorsque T = **R**) une **représentation spectrale de C.H. CRAMER** de la forme :

(18) $X_t = \int_{\mathbf{R}} e^{i 2 \pi t u}\, dY_u$,

dans laquelle $Y = (Y_u)_{u \in T}$ est un processus stochastique vectoriel complexe (à valeurs dans $\mathcal{Y} = \mathbf{C}^K$) qui est aussi un **processus à accroissements orthogonaux** tq :

(19) $E\,(dY_u)\,(dY_u)^* = dF\,(u)$,

où F est une fonction de répartition spectrale normalisée, ie : $F(-\infty) = 0+$ et $F(u+) = \lim_{h \downarrow 0+} F(u+h) = F(u)$ (continuité à droite), $\forall\, u \in T$.

(vii) D'un point de vue terminologique, et sans autre précision, l'expression de « **processus stationnaire** » fait généralement référence à la notion de processus stationnaire en covariance (mais aussi, parfois, à celle de **processus strictement stationnaire**).

(viii) En pratique, les processus stationnaires au sens large sont, le plus souvent, soit en **temps** discret (**T** = **Z**), soit en temps continu (**T** = **R**).

La notion peut s'étendre à un **espace d'état** ($\mathscr{X}$, $\mathscr{B}$) plus général que les espaces numériques précédents.