PROCESSUS STRICTEMENT STATIONNAIRE (N2)
(10 / 05 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

Plus restrictive que la **stationnarité** « large » (ie stationnarité en covariance) (cf **processus stationnaire en covariance**), la stationnarité « stricte » fait aussi référence à une **propriété d'invariance** de la **loi** d'un **processus** par translation au cours du **temps** : ses propriétés probabilistes sont invariantes par translation quelconque faite sur l'**ensemble** T de ses « indices ».

(i) Soit $X = \{(\Omega, \mathcal{T}, P), (\mathcal{X}, \mathcal{B}), (X_t)_{t \in T}\}$ un **processus stochastique** dans lequel (T,+) est un **groupe** additif abélien (ou l'une de ses parties, eg $T \subset \mathbf{Z}$ ou $T \subset \mathbf{R}$).

On dit que X est un **processus strictement stationnaire** ssi, $\forall (t_1 ,..., t_N , h) \in T^{N+1}$ tq $(t_1+h ,..., t_N+h) \in T^N$, et $\forall N \in \mathbf{N}^*$, la loi projetée $\mathcal{L}(X_{t(1) + h} ,..., X_{t(N) + h})$, ie l'image de P par la **va** $(X_{t(1) + h} ,..., X_{t(N) + h}) : \Omega \mapsto \mathcal{X}^N$, est indépendante de $h \in T$ (en notant t(n) pour désigner t_n).

Autrement dit, sous les mêmes conditions :

(1) $\mathcal{L}(X_{t(1) + h} ,..., X_{t(N) + h}) = \mathcal{L}(X_{t(1)} ,..., X_{t(N)})$,

$\forall (t_1 ,..., t_N , h) \in T^{N+1}$ tq $(t_1+h ,..., t_N+h) \in T^N$ et $\forall N \in \mathbf{N}^*$.

Il n'est pas nécessaire que T soit ordonné pour définir la **stationnarité stricte**. Celle-ci peut aussi être définie eg pour un **processus spatial**, ie pour un processus tq $T \subset \mathbf{R}^M$, avec $M \geq 1$.

Si l'on note D_N l'ensemble des **suites** $(t_1 ,..., t_N) \in T^N$ tq $(t_1 + h ,..., t_N + h) \in T^N$ et $a_h : D_n \mapsto T^N$ l'**opérateur de translation** défini par $a_h (t_1 ,..., t_N) = (t_1 + h ,..., t_N + h)$, on peut donc écrire :

(2) $\mathcal{L}(X (a_h (c_N)) = \mathcal{L}(X (c_N))$, $\forall c_N \in D_N , \forall h \in T, \forall N \in \mathbf{N}^*$,

où l'on note $c_N = (t_1 ,..., t_N)$ et $X (c_N) = (X_{t(1)} ,..., X_{t(N)})$.

(ii) Lorsque $T = \mathbf{R}_+$ et $\mathcal{X} = \mathbf{R}^K$, on peut établir une **loi forte des grands nombres** pour un processu strictement stationnaire.

En effet, si X est un **processus mesurable** et si $X_0 \in L_{\mathbf{R}K}^1 (\Omega,\mathcal{T},P)$, alors :

(3) $\lim_{t \to +\infty} t^{-1} \int_0^t X_s \, ds < \infty$, P-p.s..

(iii) On montre que :

(a) si X est strictement stationnaire, les **lois marginales** élémentaires (ie univariées) $\mathscr{L}(X_t)$ sont les mêmes (ie sont identiques entre elles), $\forall$ t $\in$ T ;

(b) si X est un processus iid (ie à va indépendantes dotées de la même loi marginale, ou loi propre), alors X est strictement stationnaire.

(iv) Une **suite** de va peut constituer un processus stationnaire. Soit $\mathbf{R}^{\mathbf{Z}}$ l'espace des suites de nombres réels $x = (x_n)_{n \in \mathbf{Z}}$ et F l'**opérateur avance**, défini selon :

(4) $\quad y = F(x) \Leftrightarrow y_n = x_{n+1}, \quad \forall n \in \mathbf{Z}$.

Alors, le processus $X = (X_n)_{n \in \mathbf{Z}}$ (en tant qu'**application mesurable** définie sur Ω et à valeurs dans $\mathbf{R}^{\mathbf{Z}}$) constitue une suite strictement stationnaire de **vars** ssi, $\forall$ B $\in \mathscr{B}$ ($\mathbf{R}^{\mathbf{Z}}$) (**tribu de parties** de $\mathbf{R}^{\mathbf{Z}}$), il vérifie :

(5) $\quad P([X \in B]) = P([X \in F(B)])$,

avec la notation usuelle $P([X \in B]) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\}) = P(X^{-1}(B))$.

Par suite, $P([X \in B]) = P([X \in F^h(B)])$, $\forall h \in \mathbf{Z}$. Donc, $\forall (n_1, ..., n_p) \in \mathbf{Z}^p$ et $\forall p \in \mathbf{N}^*$, la loi de $(X_{n(1)+h}, ..., X_{n(p)+h})$ ne dépend pas de $h \in \mathbf{Z}$.

Les définitions contenues dans cet exemple s'étendent à une suite de va complexes scalaires ($z \in \mathbf{C}^{\mathbf{Z}}$), ou à une suite élément de $\mathscr{X}^{\mathbf{Z}}$, dans laquelle $\mathscr{X}$ est un ensemble muni d'une loi de composition interne (eg un groupe additif ($\mathscr{X}$, +) et, notamment, un **espace vectoriel topologique** (le plus souvent, un **espace de BANACH** ou un **espace de HILBERT**).