

PROCESSUS VECTORIEL (N1)

(21 / 01 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

De façon générale (cf **loi multivariée**), un processus comportant plusieurs variables est appelé processus **processus multivarié** : les variables de ce processus peuvent être des **variables qualitatives**, des **variables quantitatives**, ou encore un mélange des deux types. Lorsque l'**espace des états** est un espace vectoriel, on parle plutôt de **processus vectoriel** ou de **processus multidimensionnel**.

(i) Un **processus multivarié** est ainsi un **processus stochastique** $X = (X_t)_{t \in T}$ dont les variables X_t sont à valeurs dans un produit cartésien quelconque, eg $\mathcal{X} = \prod_{k=1}^K \mathcal{X}_k$. On note $X_t = (X_{1t}, \dots, X_{Kt})$, $\forall t \in T$. Chaque coordonnée X_{kt} ($k \in N_K^*$) de X_t s'interprète souvent comme une **variable aléatoire** observable.

Lorsque $\mathcal{X}$ est un **espace vectoriel** (réel ou complexe) (eg $\mathcal{X} = \mathbf{R}^K$ ou $\mathcal{X} = \mathbf{C}^K$), on parle alors de **processus vectoriel**.

(ii) Un processus vectoriel courant est le **processus du second ordre**, ie un processus $X = \{(\Omega, \mathcal{F}, P), (\mathcal{X}, \mathcal{B}), (X_t)_{t \in T}\}$ vérifiant :

(a) $X_{kt} \in L_c^2(\Omega, \mathcal{F}, P) = H$ (**espace de HILBERT**), $\forall (k, t)$. On note $\mu_{kt} = E X_{kt}$ et $\sigma_{kt}^2 = V X_{kt}$, et l'on peut supposer eg que $\mu_{kt} = 0$, $\forall (k, t)$. Par suite, $X_t \in H^K$;

(b) on dote H^K du **produit scalaire** $(X_s, Y_t) \mapsto \langle X_s, Y_t \rangle = \text{Tr}(X_s, Y_t)$ (**trace** de la (K, K) -**matrice de GRAM** G_{st} des **va** X_s et Y_t , définie par :

$$(1) \quad G_{kl}(X_s, Y_t) = (X_{ks}, Y_{lt}), \quad \forall (k, l) \in (N_K^*)^2.$$

On dit alors que X_s et Y_t sont des **variables orthogonales** ssi :

$$(2) \quad (X_s, Y_t) = 0 \Rightarrow (X_{ks}, Y_{lt}) = 0, \quad \forall (k, l, s, t).$$

(c) $T = \mathbf{Z}$ (processus en **temps** discret) ;

(d) X est stationnaire, au sens où les matrices de GRAM (X_s, X_t) ne dépendent que de $s - t$.

On montre qu'un tel processus admet une **représentation spectrale** de la forme (cf **représentation spectrale de CRAMER**) :

$$(3) \quad (X_s, X_t) = (2\pi)^{-1} \int e^{-i(s-t)u} dF(u),$$

où F est la **mesure spectrale** (resp **fonction de répartition spectrale**) associée à X : F est donc une mesure à valeurs matricielles (ou **mesure matricielle**) et à éléments non négatifs. Si F est une **fonction absolument continue** pr à la **mesure de**

LEBESGUE λ , on appelle **densité spectrale** (matricielle) de X la **dérivée de NIKODYM-RADON** $f = dF / du$, qui est donc à valeurs dans $M_K(\mathbf{R})$.

(iii) On appelle **domaine des « temps »** de X_t la tribu $\mathcal{T}_{+\infty} = \sigma \{X_t : -\infty < t < +\infty\}$. Son **passé jusqu'en t** est la tribu $\mathcal{T}_t = \sigma \{X_s : s \leq t\}$ et son **passé « lointain »** la tribu $\mathcal{T}_{-\infty} = \sigma \{X_t : t \in \mathbb{T}\}$.

On dit que X est un **processus non déterministe** ssi $\mathcal{T}_{-\infty} \neq \mathcal{T}_{+\infty}$, et un **processus purement non déterministe** ssi $\mathcal{T}_{-\infty} = \emptyset$.

(iv) Le **processus d'innovation**, ou simplement l'**innovation**, de X est le processus $Y = (Y_t)_{t \in \mathbb{T}}$ défini par :

$$(4) \quad Y_t = X_t - (X_t \perp L_{t-1}), \quad \forall t \in \mathbb{T},$$

où $(X_t \perp L_{t-1})$ est la **projection** orthogonale de X_t sur L_{t-1} .

On montre que $(Y_s, Y_t) = \delta_{st} \cdot G$, où G est appelée **matrice d'erreur de prévision**, et que X est non déterministe ssi $G \neq \emptyset$ (cf **processus déterministe**).

Si $\text{rg } G = K$, alors (cf **théorème de WOLD**) X admet la **représentation moyenne mobile** suivante :

$$(5) \quad X_t = \sum_{j \in \mathbf{N}} a_j u_{t-j},$$

avec $\sum_{j \in \mathbf{N}} |a_j|^2 < +\infty$, où $a_j \in M_K(\mathbf{C})$, $\forall j \in \mathbf{N}$, où $u = (u_t)_{t \in \mathbb{T}}$ est un **bruit blanc** et où l'on note $|a_j| = \text{Tr}(a_j' a_j)$.