PRODUIT (A2-A5, A10, A13, B1, C4, D, E, F1, G2, N)
(30 / 04 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

Le terme usuel **produit** figure dans de nombreuses expressions, et intervient dans les trois contextes principaux suivants (cf aussi **structure produit**) :

(a) en « mathématique » :

$(a)_1$ produit d'éléments d'un **groupe algébrique** multiplicatif, **produit booléen** (ie **intersection ensembliste**), **produit tensoriel algébrique** (eg **produit de KRONECKER**) (de **matrices**, etc), produit de composition (d'applications, de fonctions, etc), **produit tensoriel de fonctions**, **produit scalaire** (ou produit « intérieur ») d'un **espace euclidien** ou d'un espace hermitien (eg **espace de HILBERT**) ;

$(a)_2$ **produit d'espaces mesurables** et **produit d'espaces mesurés**, produit tensoriel de **mesures** (cf **mesure produit**), **produit de convolution** de mesures ;

(b) en **calcul des probabilités** : produit tensoriel (de **probabilités**, de lois), **produit de convolution** (de **lois**, de **densités**) ;

(c) en **Statistique** : **modèle produit**, **problème statistique** produit, **produit tensoriel algébrique** (ie **produit de KRONECKER**) de **plans d'expérience** (cf **plan d'expérience produit**).

(i) Soit I un **ensemble** (quelconque) d'**indices** et $(E_i)_{i \in I}$ une **famille** constituée d'ensembles (quelconques) E_i .

On appelle **produit (cartésien)** des ensembles E_i (ou de la famille précédente) l'ensemble E, noté $\prod_{i \in I} E_i$, défini par :

(1) $\{x \in E\} \Leftrightarrow \{x = (x_i)_{i \in I}$, avec $x_i \in E_i$, $\forall\, i \in I\}$.

Les éléments E_i de la famille sont appelés **(ensembles) facteurs** du produit E.

En particulier, si $E_i = E_0$ (même ensemble facteur), $\forall\, i \in I$, on dit que $E = \prod_{i \in I} E_i$, alors noté E_0^I, est la **puissance (cartésienne)** de l'ensemble E_0 . Dans ce cas, la famille $x = (x_i)_{i \in I}$ est souvent identifiée à une **application** $\alpha : I \mapsto E_0$, avec $\alpha(i) = x_i$, $\forall\, i \in I$.

(ii) En **calcul des probabilités**, ou en **théorie des processus**, comme en **Statistique**, les notions de **produit d'espaces mesurables** (resp probabilisables) et de **produit d'espaces mesurés** (resp probabilisés) sont d'usage constant. Elles font appel aux concepts de produit cartésien d'ensemble, de produit tensoriel de **tribus** et de produit tensoriel de mesures. On définit d'abord la notion de produit d'espaces mesurables (resp probabilisables).

Soit T un ensemble quelconque et $(E_t , \mathcal{A}_t)_{t \in T}$ une famille constituée d'espaces mesurables (resp probabilisables) quelconques, indexée par T. On peut alors définir la notion de produit d'espaces mesurables (resp probabilisables) (cf **produit d'espaces mesurables**) : ce produit est noté $(E, \mathscr{A})$, avec $E = \prod_{t \in T} E_t$ et $\mathscr{A} = \otimes_{t \in T} \mathscr{A}_t$, parfois aussi noté $\mathscr{A}^{\otimes T}$.

Si $E_t = E_0$ et $\mathscr{A}_t = \mathscr{A}_0$, $\forall t \in T$, l'espace produit $(E, \mathscr{A}) = (E_0, \mathscr{A}_0)^{\otimes T}$ est appelé **espace mesurable puissance**, ou **espace puissance tensorielle**, de $(E_0, \mathscr{A}_0)$.

Par suite, étant donné une famille d'espaces mesurés (resp probabilisés) (quelconques) $(E_t, \mathscr{A}_t, \mu_t)_{t \in T}$, indexée par T, on définit la notion de **produit d'espaces mesurés** (resp **probabilisés**) (cf **mesure produit**). On note $(E, \mathscr{A}, \mu)$ ce produit, avec $E = \otimes_{t \in T} E_t$, $\mathscr{A} = \prod_{t \in T} \mathscr{A}_t$ et $\mu = \otimes_{t \in T} \mu_t$. En particulier, si les **espaces facteurs** $(E_t, \mathscr{A}_t, \mu_t)$ sont tous identiques à un même espace $(E_0, \mathscr{A}_0, \mu_0)$, on définit la **puissance (tensorielle)** de l'espace mesuré (resp probabilisé) $(E_0, \mathscr{A}_0, \mu_0)$: cette dernière est notée $(E_0, \mathscr{A}_0, \mu_0)^{\otimes T}$ ou $(E_0^T, \mathscr{A}_0^{\otimes T}, \mu_0^{\otimes T})$.

(iii) En théorie des processus (cf **processus stochastique**), en théorie de l'**échantillonnage** (cf **modèle d'échantillonnage**), ainsi qu'en **théorie séquentielle**, on note souvent $(\Omega_t, \mathscr{T}_t, P_t)_{t \in T}$ une famille d'espaces probabilisés (de base), indexée par un ensemble T représentant eg le « **temps** ». On considère aussi une famille $(\mathscr{X}_t, \mathscr{B}_t)_{t \in T}$ constituée d'**espaces d'état** ou d'**espaces d'observation** (encore appelés **espaces des phases**) $(\mathscr{X}_t, \mathscr{B}_t)$, et indexée par T.

La théorie conduit alors à étudier une famille $X = (X_t)_{t \in T}$ constituée de **va** $X_t : \Omega_t \mapsto \mathscr{X}_t$. On définit, de façon usuelle, $\forall t \in T$, la **loi de probabilité** $P^{X(t)}$ de X_t comme image de la **mesure de probabilité** P_t par X_t. On note alors $(\mathscr{X}, \mathscr{B}, P^X)$ l'espace produit défini par $\mathscr{X} = \prod_{t \in T} \mathscr{X}_t$, $\mathscr{B} = \otimes_{t \in T} \mathscr{B}_t$ et $P^X = \prod_{t \in T} P^{X(t)}$, où la loi P^X doit aussi satisfaire des conditions de compatibilité (cf **système projectif de probabilités**) et où X(t) désigne X_t.

En particulier, si $(\Omega_t, \mathscr{T}_t, P_t) = (\Omega_0, \mathscr{T}_0, P_0)$ (espaces identiques) et si $(\mathscr{X}_t, \mathscr{B}_t, P^{X(t)}) = (\mathscr{X}_0, \mathscr{B}_0, P^{X(0)})$, $\forall t \in T$ (mêmes espaces facteurs), on note généralement $(\mathscr{X}, \mathscr{B}, P^X) = (\mathscr{X}_0^T, \mathscr{B}_0^{\otimes T}, (P^{X(0)})^{\otimes T})$ l'espace puissance ainsi obtenu, ce qui suppose que $X_t = X_0$, $\forall t \in T$.

Souvent, on note ξ au lieu de X_0 et P^ξ au lieu de $P^{X(0)}$ (loi commune), chaque va X_t jouant alors le rôle de **copie** (ou de **réplique**) de ξ., elle-même considérée comme **variable parente**. Une autre notation courante consiste à remplacer les 0 par des * dans les écritures précédentes, voire même à négliger les 0 (ou les *) lorsqu'aucune confusion n'est possible (notamment avec la notation condensée utilisée pour l'espace puissance précédent).