PRODUIT D'ESPACES MESURABLES (OU PROBABILISABLES) (A5, B1, C4, N) (26 / 12 / 2018)

Le concept d'**espace mesurable produit**, propre à la théorie de la mesure, conduit à celui d'**espace probabilisable produit**, qui intervient dans de nombreuses questions de **calcul des probabilités**, de **théorie des processus** ou de **Statistique** : **processus stochastiques**, **échantillonnage**, **théorie séquentielle**, méthodes de **décisions adaptatives**, **expérimentation** progressive, etc.

(i) Soit $((E_t , \mathscr{A}_t))_{t \in T}$ une **famille** d'espace mesurables (ou d'espaces probabilisables) quelconques, indexée par un ensemble (quelconque) T. Soit $E = \prod_{t \in T} E_t$ le **produit** cartésien des E_t et $E^S = \prod_{s \in S} E_s$ le produit cartésien d'une sous-famille, indexée par $S \subset T$, de la famille $(E_t)_{t \in T}$.

Si S est fini (ie si Card $S < +\infty$), on note $\mathscr{A}^{\otimes S} = \otimes_{s \in S} \mathscr{A}_s$ la **tribu** produit des A_s . On appelle **cylindre de base A** $\in \mathscr{A}^{\otimes S}$ dans $E^T = E$ la partie $C_A = pr^{-1}{}_S (A)$ de E^T (où pr_S désigne la **projection** canonique $E^T \mapsto E^S$) (cf **cylindre d'un espace mesurable produit**).

L'ensemble de ces cylindres C_A engendre une tribu sur E^T appelée **tribu produit** des tribus $\mathscr{A}_t$: on note alors cette tribu $\mathscr{A}^{\otimes T} = \otimes_{t \in T} \mathscr{A}_t$.

On appelle **espace mesurable produit** ou **espace probabilisable produit** des espaces $(E_t , \mathscr{A}_t)$ (avec $t \in T$) le couple $(E^T, \mathscr{A}^{\otimes T})$.

(ii) Lorsque T est fini, on retrouve la définition usuelle de la tribu produit $\mathscr{A}^{\otimes T}$ (produit fini de tribus de parties).

(iii) La tribu produit $\mathscr{A}^{\otimes T}$ peut aussi être définie comme plus petite tribu sur $E^T = E$ rendant mesurables les **projections** pr_S de E^T sur les produits cartésiens (finis) E^S.