PRODUIT D'ESPACE MESURÉS (OU PROBABILISÉS) (B1, C4, N)
(26 / 12 / 2018)

(i) Soit (E^T, $\mathscr{A}^{\otimes T}$) un espace probabilisable produit défini à partir d'une famille ((E_t , $\mathscr{A}_t$))$_{t \in T}$ d'espaces probabilisables (E_t , $\mathscr{A}_t$), où les E_t sont quelconques (cf **produit d'espaces mesurables**). On note $\mathscr{P}_f$ (T) l'ensemble des **parties** finies de T et pr_{RS} la **projection** canonique $E_R \mapsto E_S$, où $R \subset S$ et $(R, S) \in (\mathscr{P}_f (T))^2$. Soit, $\forall$ $S \in \mathscr{P}_f$ (T), μ_S une **mesure abstraite** (resp **mesure de probabilité**) définie sur la tribu $\mathscr{A}^{\otimes S}$.

On appelle **système projectif d'espaces mesurés** (resp **système projectif d'espaces probabilisés**) la donnée d'une **famille** de quadruplets (E^S, $\mathscr{A}^{\otimes S}$, μ_S , pr_{RS}), où $(R,S) \in (\mathscr{P}_f (T))^2$ vérifie $R \subset S$, tq, $\forall$ (R, S) ainsi défini, la **condition de compatibilité**, ou **condition de cohérence**, suivante :

(1) $\quad pr_{RS} (\mu_S) = \mu_R$

soit vérifiée (en notant μ_R l'image de μ_S par la projection pr_{RS}). La famille (μ_S , pr_{RS}) ainsi définie, dans laquelle (R, S) parcourt $(\mathscr{P}_f (T))^2$ en sorte que $R \subset S$, est appelée **système compatible de mesures** (resp **système compatible de probabilités**).

(ii) On montre que :

(a) si les μ_S sont construites, par **« tensorialisation »**, à partir des mesures élémentaires (mesures « marginales » simples) μ_t resp définies sur les tribus $\mathscr{A}_t$, ie si les μ_S sont construites selon les mesures produits partielles :

(2) $\quad \mu_S = \otimes_{s \in S} \mu_s$,

on définit (ie on construit) simplement ainsi un système projectif et la **« limite projective »** μ_T des μ_S s'écrit aussi $\mu = \otimes_{t \in T} \mu_t$ (cf **système projectif de probabilités**) ;

(b) on peut généralement construire sur $\mathscr{A}^{\otimes T}$ une mesure, notée μ_T (ou simplement μ), dont les projections (par les pr_{ST}) sur les $\mathscr{A}^{\otimes S}$ (où $S \in \mathscr{P}_f$ (T)) ne sont autres que les μ_S données (cf **théorème de BOCHNER-KOLMOGOROV**).