PRODUIT DE CONVOLUTION (A5, E)
(11 / 10 / 2019, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2019)

Notion importante dans l'étude des **sommes de variables aléatoires**. Le produit de convolution des mesures concerne notamment les **lois de probabilité** : on peut alors définir le produit de convolution des **densités de probabilité** et des **fonctions de répartition**.

(i) Soit $\mathcal{B}(\mathbf{R}^n)$ la **tribu borélienne** de $\mathbf{R}^n$ et μ_1, μ_2 deux **mesures positives**, supposées être des **mesures finies**, définies sur $\mathcal{B}(\mathbf{R}^n)$.

On appelle **produit de convolution**, ou, parfois, **produit de composition**, des mesures μ_1 et μ_2 la mesure positive, notée $\mu_1 * \mu_2$, définie sur $\mathcal{B}(\mathbf{R}^n)$ selon (cf **convolution des mesures**) :

(1) $$(\mu_1 * \mu_2)(B) = (\mu_1 \otimes \mu_2)\,\{(x, y) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n : x + y \in B\}, \qquad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^n),$$

où $\mu_1 \otimes \mu_2$ désigne le produit (tensoriel) des mesures μ_1 et μ_2 (ie leur **mesure produit**).

Autrement dit, le produit de convolution $\mu_1 * \mu_2$ n'est autre que la **mesure image** de la mesure produit $\mu_1 \otimes \mu_2$ par l'application de sommation s : $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \mapsto \mathbf{R}^n$ définie par s (x, y) = x + y, ie :

(2) $$\mu_1 * \mu_2 = s\,(\mu_1 \otimes \mu_2) \text{ ou } (\mu_1 \otimes \mu_2)^s.$$

(ii) On a alors, pour toute fonction borélienne positive (resp $(\mu_1 * \mu_2)$-intégrable) f : $\mathbf{R}^n \mapsto \mathbf{R}$:

(3) $$\int_{\mathbf{R}(n)} f \, . \, d\,(\mu_1 * \mu_2) = \int_{\mathbf{R}(n) \times \mathbf{R}(n)} (f \circ s)\, d\,(\mu_1 \otimes \mu_2).$$

en notant **R**(n) pour désigner $\mathbf{R}^n$.

A titre d'exemple, les mesures $\delta_x * \mu$ (où δ_x désigne la **mesure de DIRAC** au point $x \in \mathbf{R}^n$ et où μ est une mesure positive finie) ne sont autres que les « translatées » de la mesure μ lorsque x parcourt $\mathbf{R}^n$, car $(\delta_x * \mu)(B) = \mu\,(B - x)$, $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^n)$.

On montre que, si μ_1 et μ_2 (resp ν_1 et ν_2) sont deux mesures positives finies sur $\mathcal{B}(\mathbf{R}^n)$ (resp sur $\mathcal{B}(\mathbf{R}^p)$), alors :

(4) $$(\mu_1 \otimes \nu_1) * (\mu_2 \otimes \nu_2) = (\mu_1 * \mu_2) \otimes (\nu_1 * \nu_2),$$

mesure définie sur $\mathcal{B}(\mathbf{R}^{n+p})$.

(iii) La définition (1) (resp (2)) s'étend aux **mesures bornées** et aux **mesures signées** (ie non nécessairement positives) sur $\mathcal{B}(\mathbf{R}^n)$.

L'espace des mesures bornées est stable par le produit de convolution $*$, et ce produit en fait une **algèbre** commutative et unitaire, l'unité étant la mesure de DIRAC à l'origine δ_0 (car $\delta_0 * \mu = \mu$, $\forall$ μ bornée).

(ii) En particulier, on considère un **espace probabilisé** $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ et deux **vecteurs aléatoires** réels $\xi : \Omega \mapsto \mathbf{R}^n$ et $\eta : \Omega \mapsto \mathbf{R}^n$, de **lois** resp P^ξ et P^η.

On appelle alors **produit de convolution des lois** P^ξ et P^η leur produit de convolution (en tant que mesures positives bornées), ie (cf **convolution des lois**) :

(5) $\quad (P^\xi * P^\eta)(B) = (P^\xi \otimes P^\eta)(s^{-1}(B)), \qquad \forall\, B \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^n),$

où s possède le même sens qu'en (2).

Par suite, pour toute fonction $(P^\xi * P^\eta)$-intégrable g, on a :

(6) $\quad \int g \,.\, d(P^\xi * P^\eta) = \int_{\mathbf{R}(n) \times \mathbf{R}(n)} g(x + y)\, dP^\xi(x)\, dP^\eta(y).$

(iv) Il existe des **lois** qui possèdent la propriété importante d'être des **lois stables par convolution** : ie le produit d'un nombre fini de telles lois est encore une loi de même nature. Ainsi, sont stables par convolution les familles de lp suivantes (cf aussi **loi infiniment divisible**, **loi stable**) :

(a) dans le cas « scalaire » :

$(a)_1$ la famille $\mathcal{B}_n$ des **lois binômiales** $\mathcal{B}(n, p)$ (avec $n \in \mathbf{N}^*$ et p donné), car :

(7) $\quad \mathcal{B}(n_1, p) * \mathcal{B}(n_2, p) = \mathcal{B}(n_1 + n_2, p),\ \forall\, (n_1, n_2) \in \mathbf{N}^* \times \mathbf{N}^*$;

$(a)_2$ la famille $\mathcal{P}_\lambda$ des **lois de POISSON** $\mathcal{P}(\lambda)$ (avec $\lambda \in \mathbf{R}_+$), car :

(8) $\quad \mathcal{P}(\lambda_1) * \mathcal{P}(\lambda_2) = \mathcal{P}(\lambda_1 + \lambda_2),\ \forall\, (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}_+^*$;

$(a)_3$ la famille $\mathcal{G}_n$ des **loi gamma** « centrées réduites » $\gamma_\nu(0,1)$ (avec $\nu \in \mathbf{R}^*_+$), car :

(9) $\quad \gamma_{\nu(1)}(0,1) * \gamma_{\nu(2)}(0,1) = \gamma_{\nu(1)+\nu(2)}(0,1),\ \forall\, (\nu_1, \nu_2) \in \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}_+^*$;

$(a)_4$ en relation avec la propriété 3) précédente, la famille des **lois du chi-deux** $\mathcal{X}_\nu^2$ (avec $\nu \in \mathbf{N}^*$), car :

(10) $\mathcal{X}_{\nu(1)}^{\ 2} * \mathcal{X}_{\nu(2)}^{\ 2} = \mathcal{X}_{\nu(1)+\nu(2)}^{\ 2}$, $\forall\ (\nu_1, \nu_2) \in \mathbf{N}^* \times \mathbf{N}^*$;

(b) dans le cas « vectoriel », comme dans le cas scalaire, la famille $\mathcal{N}_{\mu,\Sigma}$ des **lois normales multidimensionnelles** $\mathcal{N}_n(\mu, \Sigma)$ (avec $(\mu, \Sigma) \in \mathbf{R}^n \times (M^{++}_n(\mathbf{R}) \cup S_n(\mathbf{R}))$, car :

(11) $\mathcal{N}_n(\mu_1, \Sigma_1) * \mathcal{N}_n(\mu_2, \Sigma_2) = \mathcal{N}_n(\mu_1 + \mu_2, \Sigma_1 + \Sigma_2)$.

(iv) La notion de **produit de convolution des densités** se déduit de celle relative aux mesures. Soit μ_1 et μ_2 deux mesures définies sur $\mathcal{B}_{\mathbf{R}n}$ et admettant resp les densités f_1 et f_2 pr à la **mesure de LEBESGUE** λ_n (ie $\mu_i = f_i \cdot \lambda_n$, $\forall\ i \in N_2^*$). Si f_1 et f_2 sont λ_n-intégrables, le produit de convolution $\mu_1 * \mu_2$ admet aussi une densité f, appelée **produit de convolution des densités** f_1 et f_2, densité définie selon :

(12) $f(x) = \int f_1(u)\, f_2(x - u)\, d\lambda_n(u) = \int f_2(v)\, f_1(x - v)\, d\lambda_n(v)$.

Cette densité f se note $f_1 * f_2$.

On montre que, si $g \in L_{\mathbf{R}}^2(\mathbf{R}^n, \mathcal{B}_{\mathbf{R}(n)}, \lambda_n)$ et si $h \in L_{\mathbf{R}}^1(\mathbf{R}^n, \mathcal{B}_{\mathbf{R}(n)}, \lambda_n)$, la formule :

(13) $f(x) = (g * h)(x) = \int g(x - u)\, h(u)\, d\lambda_n(u)$, λ_n -p.p.,

définit une fonction f, élément de $L^2_{\mathbf{R}}(\mathbf{R}^n, \mathcal{B}_{\mathbf{R}(n)}, \lambda_n)$, qui vérifie :

(14) $||f||_2 = ||g * h||_2 \leq ||g||_2 \cdot ||h||_1$,

les normes $||\ .\ ||_p$ ayant leur signification habituelle dans L^p (avec ici p = 1 ou p = 2). En particulier, si $\mu_1 = P^\xi$ et $\mu_2 = P^\eta$ sont deux lp, avec $dP^\xi = f_1 \cdot d\lambda_n$ et $dP^\eta = f_2 \cdot d\lambda_n$, on définit le produit de convolution des densités de probabilité f_1 et f_2 selon :

(15) $d(P^\xi * P^\eta) = (f_1 * f_2) \cdot d\lambda_n$,

avec :

(16) $(f_1 * f_2)(x) = \int_{\mathbf{R}(n)} f_1(x - u)\, f_2(u)\, d\lambda_n(u)$, $\forall\ x \in \mathbf{R}^n$.

On note souvent $\mu_1 * \mu_2$ (B) au lieu de $(\mu_1 * \mu_2)$(B), $P^{\xi * \eta}$ (B) au lieu de $(P^\xi * P^\eta)$(B) et $f_1 * f_2$ (x) au lieu de $(f_1 * f_2)$(x).

(v) La notion de convolution des fonctions de répartition associées aux lp (ou à leurs densités) se définit directement à partir de ce qui précède.