PROGRAMMATION DYNAMIQUE (A11)
(26 / 07 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

La **programmation dynamique** est un ensemble de méthodes d'**optimisation** que l'on peut associer à toute procédure de décision en plusieurs étapes. Une procédure de ce type cherche à déterminer des décisions optimales en fonction d'une **information** disponible (eg résultat d'une **expérience**) ou d'un objectif fixé (eg rendement d'un **système** physique). Elle consiste ainsi à chercher les solutions d'un **problème d'optimisation** appelé **programme dynamique**. Elle se rattache donc à la théorie générale de l'optimisation.

En **Statistique**, l'**analyse séquentielle** (notamment, l'**estimation**, les **tests** ou la **prévision** séquentiels) constitue un domaine d'utilisation privilégiée des méthodes et résultats de la programmation dynamique.

(i) Un **problème de programmation dynamique** peut se présenter comme suit. Soit S un **système** quelconque décrivant un **phénomène** donné, évoluant au cours du temps, et représenté par un **processus déterministe** X.

A l'instant (initial) $t = 0$, S est caractérisé par un **état** (initial) $x_0 \in \mathcal{X}$, où $\mathcal{X}$ désigne l'**ensemble** des états du système (cf **espace des états**). Le **décideur** (**homme de l'art**, **statisticien**) dispose d'une variable de **décision** $d \in D$, où D représente l'**ensemble des décisions** possibles (cf **espace des décisions**). A un état $x' \in \mathcal{X}$ et à une décision $d \in D$ correspond un état « ultérieur » $x'' \in \mathcal{X}$, et ceci définit une transformation $g : \mathcal{X} \times D \mapsto \mathcal{X}$ dans l'espace des états $\mathcal{X}$. Si l'état du système est $x \in \mathcal{X}$ et la décision prise $d \in D$, l'**objectif** (eg résultat d'une expérience précédente, rendement du système) qui en résulte, noté $f(x, d)$, définit une fonction numérique $f : \mathcal{X} \times D \mapsto \mathbf{R}$ (ce qui suppose l'objectif quantifiable à l'aide d'une grandeur numérique scalaire).

On appelle **problème de programmation dynamique à horizon fini** $T \in \mathbf{N}^*$ (**au sens de R. BELLMAN**) la recherche de T décisions successives $d_1\tilde{}$,..., $d_T\tilde{}$ maximisant l'objectif (ie résultat ou rendement) d'ensemble.

Une telle suite est appelée **décision dynamique optimale**, ou **politique dynamique optimale** (d'ensemble) (au sens de R. BELLMAN).

(ii) Pour résoudre ce problème, on peut mettre en oeuvre le **principe d'optimalité de R. BELLMAN** d'après lequel est optimale toute décision (d'ensemble) tq, $\forall x_0 \in \mathcal{X}$ et $\forall d_0 \in D$ (état et décision initiaux), les décisions ultérieures $d_1\tilde{}$,..., $d_T\tilde{}$ doivent encore constituer une décision (d'ensemble) optimale pr à l'état x_0 résultant de la décision initiale d_0 .

On définit alors, $\forall\ t \in N_T^*$, une fonction $F_t : \mathscr{X} \mapsto \mathbf{R}$ dont la valeur F_t (x) s'interprète comme le **niveau de l'objectif** résultant d'une procédure de décision en T étapes, laquelle utilise une décision optimale à partir de $x_0 \in X$.

Le principe d'optimalité s'explicite ainsi selon la procédure d'**optimisation séquentielle** suivante :

$$F_1 (x_1) = \sup_{d \in D} f (x_0 , d),$$

(1)

$$F_t (x_t) = \sup_{d \in D} \{f (x_{t-1} , d) + F_{t-1} (g (x_{t-1} , d))\}, \qquad \forall\ t \geq 2,$$

avec $g (x_{t-1} , d) = x_t$, $\forall\ t \geq 2$.

(iii) Il existe diverses extensions du problème précédent. Notamment, la **programmation dynamique stochastique** est une procédure de décision en plusieurs étapes dans laquelle la transformation g et l'objectif f sont **aléatoires**, le système S étant décrit à l'aide d'un **processus stochastique** $X = (X_t)_{t=0,1,...,T}$ basé sur un **espace probabilisé** fondamental $(\Omega, \mathscr{T}, P)$. Par suite, si l'on utilise eg le critère de l'**espérance mathématique**, la **procédure** d'optimisation séquentielle (1) devient :

$$F_1 (x_1) = \sup_{d \in D} E\, f (X_0 , d),$$

(2)

$$F_t (x_t) = \sup_{d \in D} E \{f (X_{t-1} , d) + F_{t-1} (g (X_{t-1} , d))\}, \qquad \forall\ t \geq 2,$$

l'espérance mathématique E étant calculée avec P.

(iv) En pratique, se posent souvent des problèmes de définition des fonction f, g ou F_t ($t \in N_T^*$), ou de calcul des espérances précédentes.

Ces problèmes peuvent se résoudre à l'aide des méthodes d'estimation usuelles (à partir de l'observation des **trajectoires** du processus X), ou encore par **simulation**.