PROGRAMMATION MATHÉMATIQUE (A11)
(08 / 01 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

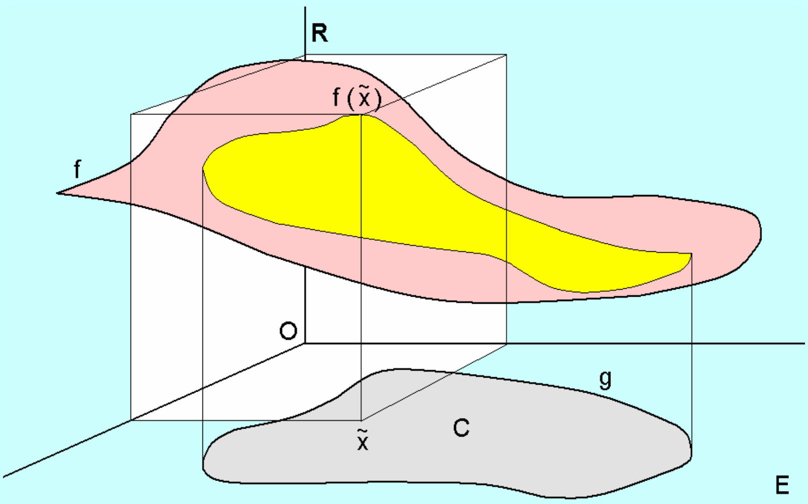
On appelle **programmation mathématique** un ensemble de méthodes de base de la théorie de l'**optimisation**. Comme dans d'autres sciences (eg économie), ces méthodes sont fréquemment mises en oeuvre en **Statistique** : **méthode du maximum de vraisemblance**, avec ou sans **contrainte** sur les **paramètres** (cf **contrainte sur les paramètres**), **méthodes à distance minimale** (eg **méthode de moindres carrés**), etc.

Ainsi, la propriété d'**optimalité** d'une **décision statistique** est relative à une **fonction de risque** donnée. Une décision optimale résulte de la résolution d'un problème de programmation mathématique : elle n'est autre que la **solution optimale** d'un tel problème.

(i) Soit E un **espace vectoriel** réel, $f : E \mapsto \mathbf{R}$ et $g_1 : E \mapsto \mathbf{R}^{m(1)}$ des fonctions numériques, $g_2 \in \mathscr{L}(E, \mathbf{R}^{m(2)})$ une **application linéaire** continue, $a \in \mathbf{R}^{m(1)}$ et $b \in \mathbf{R}^{m(2)}$ deux entiers donnés (m(1) et m(2) désignent resp $m_1 \in \mathbf{N}^*$ et $m_2 \in \mathbf{N}^*$). On pose $m = m_1 + m_2$ et :

(1) $\quad C = \{x \in E : g_1(x) \leq a,\ g_2(x) = b\}$

(ensemble des « points » x qui vérifient m contraintes, dont m_1 à l'inégalité et m_2 à l'égalité) (cf schéma ci-après).



On appelle alors **(problème de) programmation mathématique**, ou **(problème de) programmation non linéaire**, la recherche des solutions $x^{\sim} \in E$ qui rendent f optimum (ou optimale), ie (selon la nature du problème concret sous-jacent) soit maximum, soit minimum, lorsque x est astreint à parcourir C. On note :

(2) $\quad \mathrm{opt}_C\, f, \qquad$ ie $\mathrm{opt}\,\{f(x) / x \in C\} \qquad$ (avec opt = sup ou inf).

On note aussi $x^{\sim} = \arg \mathrm{opt}_C\, f$ ou $x^{\sim} = \arg \mathrm{opt}\,\{f(x) / x \in C\}$.

(ii) D'un point de vue terminologique :

(a) f est appelée **(fonction) objectif**, ou **optimande**, du problème (2) ;

(b) les fonctions g_i (i = 1, 2) sont appelées **contraintes** du problème : g_1 exprime des **contraintes à l'inégalité**, et g_2 exprime des **contraintes à l'égalité**, ou **contraintes saturées**, ou encore **contraintes à saturation**.

On peut noter, de façon synthétique, $g \leq c$, avec c = (a, b) et $g = (g_1 , g_2)$ l'ensemble des deux relations entre coordonnées de x. On note alors, plus précisément, $g_1 (x) < a$ (inégalité stricte associée à chacune des fonctions coordonnées de g_1), puisque $g_2 (x) = b$ contient les relations à l'égalité.

L'ensemble C est appelé **région définie par les contraintes**, ou **espace**, **défini par les contraintes**, ou **région de contrainte**, ou simplement **contrainte**, du problème (2).

Ce problème a un sens (ie comporte des solutions) ssi $C \neq \emptyset$. On admet souvent que $b \in \text{Int } g_2 (E)$: dans le cas contraire, celà signifie, le plus souvent, que certaines fonctions coordonnées de g_2 constituent des contraintes redondantes.

(iii) La résolution de (2) nécessite des hypothèses portant sur les ensembles considérés (notamment sur C) et sur les fonctions données f, g_1 et g_2 .

Ainsi, lorsque f et g_1 sont des **fonctions convexes**, on parle de **programmation convexe**. Lorsque f, g_1 et g_2 sont différentiables (cf **différentiabilité**), on parle de **programmation différentiable** : C est alors souvent une (sous-)**variété différentielle** de E.

(iv) Certaines classes de programmes mathématiques sont importantes, eg :

(a) si $f \in \mathscr{L}(E, \mathbf{R}) = E'$ (**dual topologique** de E) et si $g_1 \in \mathscr{L}(E, \mathbf{R}^{m(1)})$, on définit un **problème de programmation linéaire**. En Statistique, un tel problème se pose notamment lorsqu'un **modèle de régression multiple** linéaire est estimé par la **méthode des moindres écarts absolus** (méthode de moindre **norme** dans l^1) ;

(b) si f est une **forme quadratique** sur E et si $g_1 \in \mathscr{L}(E, \mathbf{R}^{m(1)})$, on définit un **problème de programmation linéaire quadratique,** communément appelé **programme linéaire quadratique**.

Cette situation est fréquente en Statistique lorsqu'on utilise une **méthode de moindres carrés** sous contraintes linéaires. Ainsi, Q étant une **matrice définie positive**, si $g_1 = 0$ et $g = g_2$ (ie si $m_1 = 0$ et $m_2 = m$), on recherche la solution du programme suivant :

(3) $\inf_C x' Q x$, avec $C = \{x \in E : g (x) = b\}$,

lequel s'associe naturellement à la **méthode des moindres carrés généralisés** (sous contrainte linéaire saturée). Par contre, si $g = g_1$ et $g_2 = 0$ (ie si $m_1 = m$ et $m_2 = 0$), on recherche la solution du programme suivant :

(4) $\inf_C x' C x$, avec $C = \{x \in E : g(x) \leq a\}$,

lequel s'associe à la méthode des moindres carrés généralisés (sous contrainte linéaire non saturée).

(v) Un des résultats fondamentaux de la théorie est le **théorème de KUHN-TUCKER**, associé aux notions de **lagrangien**, de **point-selle** et de multiplicateur (**multiplicateur de KUHN-TUCKER**, **multiplicateur de LAGRANGE**).

La programmation mathématique (déterministe), au sens précédent, s'étend en celle de **programmation stochastique**, dans laquelle les divers éléments mis en jeu peuvent être aléatoires (cf eg **contrainte stochastique**).

(vi) En Statistique, les multiplicateurs reçoivent une interprétation particulièrement utile dans le cadre du **test des multiplicateurs de LAGRANGE**.