PROGRAMME « MAXIMIN » (A11)

(14 / 05 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

Un programme maximin correspond à un problème de **programmation mathématique** dans lequel on maximise sous contraintes la plus petite (fonction) coordonnée d'une fonction objectif vectorielle. Ceci est le cas lorsqu'un **problème d'optimisation** comporte un optimande à plusieurs objectifs.

(i) **Programme concave.** Soit $f_k : \mathbf{R}^n \mapsto \mathbf{R}$ ($k \in N_K^*$) une **suite** (finie) de fonctions objectifs, supposées concaves (cf **convexité**), $g_1 : \mathbf{R}^n \mapsto \mathbf{R}^{m(1)}$ une fonction dont les coordonnées supposées concaves sont g_{1i} ($i = 1, \dots, m_1$) et $g_2 : \mathbf{R}^n \mapsto \mathbf{R}^{m(2)}$ une fonction dont les coordonnées supposées affines sont g_{2i} ($i = 1, \dots, m_2$) ($m(1)$ et $m(2)$ désignent resp m_1 et m_2).

Un **programme « maximin »**, ou « **programme max-min** », ou encore « **programme sup-inf** », consiste à trouver les points $x \in \mathbf{R}^n$ qui maximisent la plus petite des valeurs $f_k(x)$ ($k \in N_K^*$) sous les contraintes (supposées compatibles, ie non vides) $g_1 \geq 0$ et $g_2 = 0$.

Autrement dit, si $f^* : \mathbf{R}^n \mapsto \mathbf{R}$ est la fonction objectif définie selon :

$$(1) \quad f^*(x) = \min_{k=1}^K f_k(x), \quad \forall x \in \mathbf{R}^n,$$

alors f^* est concave sur $\mathbf{R}^n$ et le problème se ramène à un problème de **programmation concave** :

$$(2) \quad \sup_{x \in C} f^*(x), \quad \text{avec } C = \{x \in \mathbf{R}^n : g_1(x) \geq 0, g_2(x) = 0\} \neq \emptyset.$$

C est donc une **partie convexe** et fermée (cf **partie ouverte**).

(ii) Les **conditions de KUHN-TUCKER** associées à (2) s'expriment par le problème suivant :

$$(P) \quad \text{trouver } \alpha \in \mathbf{R}_+^K, \beta \in \mathbf{R}_+^{m(1)}, \gamma \in \mathbf{R}^{m(2)}, \tilde{x} \in \mathbf{R}^n \text{ et } f(\tilde{x}) \in \mathbf{R},$$

tq x maximise sur $\mathbf{R}^n$ (maximum « libre ») la **fonction de LAGRANGE** (ou **lagrangien**) définie par :

$$(3) \quad L(x, \alpha, \beta, \gamma) = \alpha' f(x) + \beta' g_1(x) + \gamma' g_2(x),$$

où f est la fonction vectorielle, définie sur $\mathbf{R}^n$ et à valeurs dans $\mathbf{R}^K$, dont les coordonnées sont les fonctions f_k ($k \in N_K^*$), compte tenu des restrictions suivantes :

$$\begin{aligned}
& e_K' \cdot \alpha = 1, \text{ avec } e_K = (1, \dots, 1) \in \mathbf{R}^K, \\
& f_k(\tilde{x}) - f^*(\tilde{x}) \geq 0, \quad \forall k \in N_K^*, \\
& \alpha_k \cdot \{f_k(\tilde{x}) - f^*(\tilde{x})\} = 0, \quad \forall k \in N_K^*, \\
(4) \quad & g_{1i}(\tilde{x}) \geq 0, \quad \forall i = 1, \dots, m_1, \\
& \beta_i \cdot g_{1i}(\tilde{x}) = 0, \quad \forall i = 1, \dots, m_1, \\
& g_{2i}(\tilde{x}) = 0, \quad \forall i = 1, \dots, m_2.
\end{aligned}$$

(iii) **Programme différentiable.** Il existe une version différentiable de programme maximin, à laquelle sont associées les conditions de KUHN-TUCKER correspondantes.

(iv) Si l'on change le signe des fonctions objectifs (coordonnées), on définit la notion de **programme « minimax »**, ou encore « **programme inf-sup** ». Ce type de programme correspond au **principe de précaution**, dans lequel la décision adoptée est celle qui minimise le plus grand risque, ou le plus grand inconvénient.

A titre d'exemples (cf aussi **catastrophe, théorie des catastrophes**) :

(a) physique : risques géologiques (eg avalanche, glissement de terrain) ;

(b) biologie : risques sanitaires (complications d'une pathologie, potentialités épidémiologiques), arbitrages divers (traitements appliqués à tort, traitements non appliqués à tort) ;

(c) écologie : pertes de biodiversité, risques industriels (effets externes négatifs) ;

(d) psychologie : arbitrages entre formes d'éducation ;

(e) sociologie (économie) : arbitrages / dosages entre politique budgétaire (notamment, dépense publique), politique monétaire, politique fiscale, politique industrielle ou politique d'échanges extérieurs.

(v) Les types d'optimisation précédents accordent un « poids » égal à chacune des fonctions coordonnées f_k de f . On peut parfois :

(a) soit affecter aux coordonnées f_k des poids différents, eg λ_k ($k \in N_K^*$), et optimiser de la même façon une fonction f^{**} dont les fonctions coordonnées seraient $\lambda_k f_k$ (cf aussi **fonction de poids**) ;

(b) soit optimiser une **combinaison linéaire convexe** de ces mêmes coordonnées : $f^{***}(x) = \sum_{k=1}^K \lambda_k f_k(x)$, avec $\lambda_k \geq 0$ et $\sum_{k=1}^K \lambda_k = 1$ (programme mathématique usuel).

(vi) En **Statistique**, l'estimation d'un **modèle de régression multiple** (non linéaire), écrit dans l'**espace des observations** $\mathbf{R}^N$ sous la forme :

$$(5) \quad y = F(b) + u,$$

avec $E u = 0$ et $V u = \sigma^2 \cdot \Omega$,

s'effectue parfois à l'aide d'une **méthode minimax**, dont l'objectif est de minimiser le plus grand écart entre le modèle et l'observation, ie la plus grande valeur coordonnée $|u_n|$ de u : l'**estimateur** de $b \in \mathbf{R}^Q$ ainsi obtenu provient de la minimisation de $\max_{n=1}^N |u_n|$ par à b .

Si b est contraint à parcourir une partie stricte (bornée non vide) de $\mathbf{R}^Q$, l'estimateur en question s'obtient par résolution d'un **programme minimax**. On parle parfois, dans cette situation, de **régression minimax**.