PROJECTEUR, PROJECTION (A3, A7, H3, J)
(08 / 05 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

Aux notions mathématiques de **projecteur** et de **projection** s'associe notamment, en **Statistique**, celle d'**estimateur par projection** : eg **estimateur à distance minimale** ou **estimateur à distance minimum**.

(i) En algèbre, on considère une **famille** quelconque $(E_i)_{i \in I}$ d'**ensembles** quelconques E_i et l'on note $E = \Pi_{i \in I} E_i$ leur **produit** cartésien.

On appelle alors **projecteur canonique d'indice i**, ou **i-ième projecteur canonique**, de E sur sa composante E_i l'**application** $E \mapsto E_i$, notée pr_i ou $pr_{E(i)}$ (où E(i) désigne E_i).

Le projecteur pr_i associe donc à tout $x \in E$ sa « coordonnée » d'**indice** i, ie $x_i \in E_i$: $pr_i\ x = x_i$. Cette coordonnée est souvent aussi appelée **projection** (**canonique**) **d'indice i**, ou **i-ième projection** (**canonique**) (si $I = N_n$*).

Si E est une puissance cartésienne E_0^I, ie si $E_i = E_0$ (donné), $\forall i \in I$, on note $pr_i : E \mapsto E_0$ au sens où $pr_i : E \mapsto E_i$ avec $E_i = E_0$ (sans qu'aucune ambiguité n'en résulte, en général).

Ces définitions s'appliquent, en particulier, au cas « fini » dans lequel $I = N_n$*.

(ii) Soit E un **espace vectoriel** sur un corps commutatif **K** et soit $L \triangleleft E$ et $M \triangleleft E$ deux **sous-espaces vectoriels supplémentaires** (ie $L + M = E$ et $L \cap M = \{0\}$) de E.

On appelle **projecteur sur L parallèlement à M**, ou simplement (lorsque L et M sont sous-entendus) projecteur dans E, l'**application linéaire** $p_L : E \mapsto L$ définie selon :

(1) $\quad p_L (x) = l \in L, \qquad \forall x \in E.$

On définit, de même, le projecteur sur M parallèlement à L.

On montre que :

(a) $\mathrm{Im}\ p_L = p_L (E) = L$ et $\mathrm{Im}\ p_M = p_M (E) = M$, d'où $p_L (E) + p_M (E) = E$ (cf **image d'une application linéaire**) ;

(b) $\mathrm{Ker}\ p_L = p_L^{-1} (\{0_L\}) = M$ et $\mathrm{Ker}\ p_M = p_M^{-1} (\{0_M\}) = L$ (cf **noyau d'une application linéaire**) ;

(c) $p_L^2 = p_L$ et $p_M^2 = p_M$ (**idempotence**) ;

(d) si $p_L = (f + id_E) / 2$ est un projecteur, alors f est un **endomorphisme** involutif de E, ie $f \in$ End (E) et $f^2 = id_E$ (cf **involution**). Réciproquement, si $g \in$ End (E) est tq $g^2 = g$, alors g est un projecteur ; si $h \in$ End (E) est involutif (ie $h^2 = id_E$), alors $k = (h + id_E) / 2$ est un projecteur ;

(e) si f et g sont deux projecteurs, alors f + g est un projecteur ssi f o g + g o f = 0 (application nulle). De plus, Ker f = Ker g ssi f = f o g et g = g o f.

Comme précédemment, étant donné un point $x \in E$ et un projecteur p_L de E sur $L \lhd E$, on appelle **projection de x parallèlement à M** l'image $p_L(x) = l \in L$ de x par l'application linéaire p_L .

(iii) En Statistique, le **théorème de la projection orthogonale** suivant illustre les propriétés algébriques et géométriques précédentes.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie Dim E = N sur le corps **R** des réels, $(x_k)_{k=1,\ldots,K}$ une suite de vecteurs $x_k \in E$, $X = [x_1 ,\ldots, x_K]$ la (N,K)-**matrice** admettant pour colonnes les vecteurs x_k et supposée de **rang** K (ie rg X = K) (cf **matrice d'observation**), $L(X) = L(x_1 ,\ldots, x_K)$ le sous-espace vectoriel de E engendré par les x_k et $y \in E \setminus \{0\}$ un vecteur donné.

La **projection orthogonale** de y sur L (X) est donnée par la formule :

(2) $y^* = p_{L(X)}\, y = X\,(X'\,X)^{-1}\,X'\,y \in L(X),$

l'orthogonalité étant entendue au sens du **produit scalaire** euclidien usuel $(u, v) \in E^2 \mapsto u'\,v \in \mathbf{R}$.

Dans (2), la matrice $X\,(X'\,X)^{-1}\,X'$ du projecteur $p_{L(X)}$ est une **matrice symétrique** qui est aussi une **matrice idempotente**. En effet, on montre qu'une matrice $A \in M_n(\mathbf{R})$ est la matrice d'un projecteur orthogonal ssi elle est symétrique et idempotente, ie ssi $A \in S_n(\mathbf{R}) \cap I_n(\mathbf{R})$.

(iv) La notion de projecteur dans un espace vectoriel s'étend à des familles (finies) de sous-espaces vectoriels $(V_i)_{i=1,\ldots,n}$. Ainsi, soit $E = \oplus_{i=1}^n V_i$ une décomposition de l'espace vectoriel E en **somme directe**, ie tout élément $x \in E$ peut s'écrire, de façon unique, sous la forme $x = \Sigma_{i=1}^n v_i$, avec $v_i \in V_i$, $\forall\, i \in N_n^*$.

On appelle alors **projecteur d'indice i**, ou **i-ième projecteur**, de E sur V_i l'application $p_{V_i} : E \mapsto V_i$, simplement notée pr_i , définie selon :

(3) $x \in E \mapsto pr_i(x) = v_i \in V_i$.

On montre alors que :

(a) pr_i est une application linéaire et idempotente (ie $pr_i^2 = pr_i$), et réciproquement ;

(b) $j \neq i \Rightarrow pr_i \circ pr_j = 0$ et $pr_j \circ pr_i = 0$ (produit de composition des applications) ;

(c) $pr_i (E) = \mathrm{Im}\ pr_i = V_i$, $\forall\ i \in N_n^*$;

(d) si $\mathrm{Dim}\ V_i = d_i$ et $\mathrm{Dim}\ E = d = \Sigma_{i=1}^{n} d_i$, alors $\mathrm{rg}\ pr_i = \mathrm{Dim}\ V_i = d_i$ (cf **rang**) ;

(e) $\mathrm{Ker}\ pr_i = \oplus_{j \neq i} V_j$.

(v) Enfin, soit E et F deux ensembles donnés et $f : E \mapsto F$ une application quelconque.

On définit, pour toute suite finie d'éléments de E, la **projection « naturelle »**, ou **projection canonique**, de F^E sur $F^k = F^{\{x(1) ,..., x(k)\}}$ selon :

(4) $f \in F^E \mapsto pr_{x(1)... x(k)} (f) = (f (x_1) ,..., f (x_k)) \in F^k$,

où x(i) désigne x_i (i = 1 ,..., k).

(vi) Le terme « projection » désigne ainsi aussi bien la méthode consistant à « projeter » (action) que le résultat obtenu, ie aussi bien l'application de projection que l'image de cette dernière.