PROMENADE ALÉATOIRE (N2)
(10 / 04 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

De façon générale, une **promenade aléatoire** est un **processus stochastique** décrivant la **trajectoire** parcourue par un « point mobile » (eg une « particule ») qui se déplace par **sauts**, donc de façon « discontinue », la longueur ou la direction de ces sauts pouvant aussi être aléatoires. Un tel processus peut donc être défini dans tout **espace d'état** muni d'une **distance** et d'une **orientation** (**espace métrique** orienté : eg **espace vectoriel normé** ou **espace euclidien**).

De nombreuses promenades aléatoires de base suivent (ou se ramènent à) des **schémas** moins généraux. Ainsi :

(a) la longueur des sauts est souvent non aléatoire, ie p.s. constante ;

(b) la direction des sauts peut prendre un nombre fini de valeurs, eg : « Nord, Sud, Est, Ouest », ou « avant, arrière », etc.

(i) Soit X = $\{(\Omega, \mathcal{T}, P), (\mathcal{X}, \mathcal{B}), (X_t)_{t \in T}\}$ un processus en **temps** discret T = **N***, à **espace d'état** $\mathcal{X} = \{-1, +1\}$. On suppose que X est iid, ie tq $(X_t)_{t \in T}$ est une suite de **copies**, indépendantes entre elles, de la **variable aléatoire** $\xi : \Omega \mapsto \mathcal{X}$ (cf **suite iid**, **variable parente**).

Dans ce cadre, on appelle **promenade aléatoire**, ou **marche aléatoire**, associée à X le processus $S = (S_N)_{N \in \mathbf{N}}$ défini selon :

$$(1) \quad \begin{cases} S_0 = 0, \\ S_N = \Sigma_{n=1}^{N} X_n, \quad \forall N \in \mathbf{N}^*. \end{cases}$$

L'indice $n \in \mathbf{N}$ est souvent appelé **instant**, **date**, **période**, **époque** ou encore **étape**. L'application $N \in \mathbf{N} \mapsto S_N \in \mathbf{Z}$ est aussi appelée **promenade du processus** X (cf **trajectoire**).

Lorsque N est fixé, le **graphe** $(n, S_n)_{n=0,1,\ldots,N}$ est appelé **chemin fini** (de longueur N). Il existe 2^N tels chemins : on considère souvent ceux-ci comme résultant d'un tirage selon la **probabilité** uniforme 2^{-N} et l'on parle de **promenade aléatoire symétrique**.

Pour tout $N \in \mathbf{N}$, la probabilité d'un **événement** survenant pendant les $M \leq N$ premiers instants ne dépend pas de N : c'est pourquoi, en pratique, on considère généralement que N est assez grand (N >> 0). La suite $(S_n)_{n=1,\ldots,N}$ est alors appelée **promenade finie**.

(ii) Par analogie avec le mouvement d'un **point mobile** (« particule » de la physique) sur la droite réelle **R**, l'évènement $[S_n = s]$ signifie que le point mobile est en position (ou qu'il « visite » l'**état**) $s \in \mathbf{Z}$ à l'instant n. La probabilité d'un tel événement est :

$$
(2) \qquad p_{ns} = \begin{cases} P([S_n = s]) = 2^{-n} \,.\, C_n^{(n+s)/2}, & \text{si } (n+s)/2 \in N_N, \\ 0, & \text{sinon,} \end{cases}
$$

où C_b^a désigne le nombre de **combinaisons** de a éléments parmi b.

On dit que l'événement $[S_n = 0]$ correspond à un **« retour » à l'origine** du point mobile à l'instant n ssi $S_n = 0$, avec $n \in 2\,\mathbf{N}^*$. La probabilité de cet événement est donc $p_{n0} = 2^{-n} \,.\, C_n^{n/2}$.

En particulier, on appelle **instant de premier retour** (à l'origine) le plus petit $n \in 2\,\mathbf{N}^*$ tq $S_n = 0$ (on a donc $S_1 \neq 0$,..., $S_{n-1} \neq 0$ et $S_n = 0$). Si l'on note p_n la probabilité de cet événement (ie du « premier retour à l'origine »), on établit les **équations de récurrence** suivantes :

$$
(3) \qquad \begin{cases} \pi_0 = 0, \\ p_{n0} = \pi_2\, p_{n-2,0} + \pi_4\, p_{n-4,0} + \ldots + \pi_n\, p_{00}, & \forall\, n \in 2\,\mathbf{N}^*, \end{cases}
$$

ainsi que :

$$
(4) \qquad \pi_n = p_{n-2,0} - p_{n0}, \qquad \forall\, n \in 2\,\mathbf{N}^*,
$$

et :

$$
(5) \qquad \pi_n = (n-1)^{-1} \,.\, p_{n0}, \qquad \forall\, n \in 2\,\mathbf{N}^*.
$$

Dans ce cadre élémentaire, on montre que :

(a) $P([S_1 \neq 0] \cap \ldots \cap [S_n \neq 0]) = P([S_n = 0]) = p_{n0}$, $\forall\, n \in 2\,\mathbf{N}^*$;

(b) la probabilité pour que la **dernière visite (à l'origine)** ait lieu à l'instant M, entre l'instant 0 et l'instant $n \in 2\,\mathbf{N}^*$, est donnée par l'équation de récurrence :

$$
(6) \qquad v_{Mn} = p_{n0} \,.\, p_{n-M,0}, \qquad \forall\, M \in 2\,N_n^* = \{2, 4, \ldots, 2\,n\}.
$$

Cette probabilité est l'une de celle qui permettent de définir la **loi Arc sinus** (discrète), car elle admet pour **approximation** la loi Arc-sinus continue (cf aussi **approximation des lois**), ie :

$$
(7) \qquad \Sigma_{M < nt/2}\, v_{Mn} \to_{n \to +\infty,\, n \in 2\,\mathbf{N}^*} (2/\pi) \,.\, \text{Arc sin } t^{1/2}, \qquad \forall\, t \in]0, 1[.
$$

La probabilité v_{Mn} précédente est aussi la probabilité pour que, entre l'instant 0 et l'instant $n \in 2\,\mathbf{N}^*$ inclus, le point mobile demeure pendant M instants sur la partie positive du graphe précédent (ie sur $\{n \in N_N^* : S_n > 0\}$) et pendant n - M instants sur sa partie négative.

La **loi des temps de séjour** est donc aussi la loi Arc-sinus (discrète) (cf aussi **loi du temps d'occupation**).

(iii) Une **marche aléatoire** est aussi être définie comme **chaîne de MARKOV** S = $(S_n)_{n \in \mathbf{N}}$ à espace d'états $\mathscr{X}$ dénombrable et en temps discret T = **N**. Ce processus est, en général, spécifié avec $\mathscr{X}$ = **Z** et par la donnée des trois suites de **probabilités conditionnelles** suivantes :

$$p_n = P([S_{n+1} - S_n = +1] / [S_n = n]),$$

(8) $$q_n = P([S_{n+1} - S_n = 0] / [S_n = n]),$$

$$r_n = P([S_{n+1} - S_n = -1] / [S_n = n]),$$

avec $q_0 = 0$ et $p_n + q_n + r_n = 1, \forall n \in \mathbf{N}$.

Si l'on appelle **(suite des) polynômes de S. KARLIN - J. MAC'GREGOR** la suite orthonormée $(P_n)_{n \in \mathbf{N}}$ des polynômes P_n définis par l'**équation de récurrence** :

(9) $$P_0(x) = 1,$$
$$P_n(x) = p_n . P_{n+1}(x) + q_n . P_n(x) + r_n . P_{n-1}(x), \qquad \forall n \in \mathbf{N}^*,$$

on peut associer à une telle suite une **mesure** unique μ, parfois appelée **« mesure spectrale »**, définie sur les **boréliens** du segment I = [-1, +1], selon :

(10) $$\kappa_n . \int_I P_\alpha P_\beta \, d\mu = \delta_{\alpha\beta}, \qquad \forall (\alpha, \beta) \in \mathbf{N}^2,$$

où $\delta_{\alpha\beta}$ désigne le **symbole de KRONECKER** et $\kappa_n = (\Pi_{i=1}^n r_i)^{-1} . \Pi_{i=0}^{n-1} p_i$. La suite $(P_n)_{n \in \mathbf{N}}$ permet donc de représenter la suite $(p_n, q_n, r_n)_{n \in \mathbf{N}}$ et de caractériser ainsi S.

(iv) On peut définir une **marche aléatoire** plus générale, dans laquelle le point mobile se déplace dans une direction (l'espace d'états étant $\mathscr{X}$ = **Z**) et par sauts égaux soit à -1, soit à 0, soit à +1.

La généralisation la plus étudiée concerne la marche S générée par un processus X = $(X_n)_{n \in \mathbf{N}}$ à espace d'états multidimensionnel $\mathscr{X} = \mathbf{Z}^K$ et en temps discret (T = **N**), supposé iid selon la loi P^ξ d'une **va** $\xi : \Omega \mapsto \mathscr{X}$, ie $\mathscr{L}(X_n) = P^\xi, \forall n \in \mathbf{N}$.

On appelle alors **promenade aléatoire**, d'état initial X_0 , effectuée selon la loi P^ξ, la suite S = $(S_n)_{n \in \mathbf{N}}$ définie selon les sommes partielles (ou sommes cumulées) :

(11) $$S_N = \Sigma_{n=0}^N X_n, \qquad \forall N \in \mathbf{N}.$$

On montre que S est une chaîne de MARKOV sur $\mathbf{Z}^K$ dont la **matrice de transition** (aussi notée P) admet pour terme général :

(12) $P_{z'z''} = P^\xi (z'' - z'), \qquad \forall (z', z'') \in \mathscr{X}^2$.

Par suite, $P_{z'z''}{}^{*n} = P^\xi (z'' - z') * \ldots * P^\xi (z'' - z')$ (n-ième **puissance** de **convolution** de $P^\xi (z'' - z')$) (cf **produit de convolution**).

D'autres généralisations supposent eg que, à chaque instant $n \in \mathbf{N}^*$, le point mobile se déplace d'une longueur algébrique aléatoire X_n à valeurs dans **R** (donc pouvant différer de -1, 0 ou +1). On étudie alors la loi de S_N .

Plus généralement, ce point peut se déplacer dans $\mathbf{R}^2$ (resp dans $\mathbf{R}^K$) selon les coordonnées aléatoires (X_{1n} , X_{2n}) (resp (X_{1n} ,..., X_{Kn})) et la promenade est définie par le **vecteur aléatoire** $(S_{1N} , S_{2N}) = (\Sigma_{n=1}^N X_{1n} , \Sigma_{n=1}^N X_{2n})$ (resp (S_{1N} ,..., S_{Kn}) défini de façon analogue), vecteur dont on cherche à déterminer la loi.

(iv) Les problèmes usuels posés par ces processus consistent eg à :

(a) déterminer la probabilité que le point mobile atteigne une région donnée $B \in \mathscr{X}$ à l'instant (ou pendant une période de temps) n ;

(b) déterminer la probabilité qu'il atteigne une région donnée B'' après (resp sans) avoir atteint une région donnée B' ;

(c) déterminer la probabilité qu'il « chemine » dans un **cylindre** (« tunnel » ou « serpent ») $(B_n)_{n \in \mathbf{N}}$ donné, où $B_n \in \mathscr{B}$, $\forall n \in \mathbf{N}$;

(d) calculer le temps moyen (ou le plus probable) pour qu'il atteigne une région donnée $B \in \mathscr{B}$ à partir de l'instant initial.

Les applications classiques concernent la physique statistique (étude de l'« éparpillement » de particules, ou de la « dissipation » d'une quantité d'**énergie d'un système**), l'économie (fluctuations d'un stock de produits), etc.