PROPRIÉTÉ ASYMPTOTIQUE (A3, A4, E2, F9, G11, H7, I9, J9, N12)
(18 / 10 / 2019, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2019)

(i) Soit $x = (x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une **suite** d'éléments d'un **ensemble** E et Pr une « propriété » vérifiée, ou non, par x.

On dit que Pr est une **propriété asymptotique** de x ssi le fait de modifier les valeurs d'un nombre quelconque, mais fini, de termes $x_n \in E$ de x n'influe pas sur le fait que x vérifie, ou non, la propriété Pr.

On peut noter {x : Pr} (resp {x :] Pr} ou {x : Pr ^{c}} pour exprimer que x vérifie (resp ne vérifie pas) Pr.

La définition se formalise alors selon :

(1) $\{x : Pr\} \Leftrightarrow \{x_\varphi = (x_{\varphi(N,n)})_{n \in \mathbf{N}} : Pr\}$,

pour toute **partie** finie $N \subset \mathbf{N}$ (ie card $N < +\infty$) et toute **application** $\varphi (N, .) : \mathbf{N} \mapsto \mathbf{N}$ tq :

(2) $$\begin{cases} x_{\varphi(N,n)} \neq x_n , & \forall n \in N, \\ x_{\varphi(N,n)} = x_n , & \forall n \in N^c = \mathbf{N} \setminus N. \end{cases}$$

Dans (1), on note x_φ la suite sur E qui provient de la **modification** de x définie en (2).

(ii) A titre d'exemple :

(a) si (E, d) est un **espace métrique** $x = (x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite sur E et $x_\infty \in E$, la propriété $Pr = \{x : \lim x = \lim_n x_n = x_\infty\}$ (existence d'une limite) est une propriété asymptotique de x ;

(b) si E est un **espace de BANACH**, la propriété $Pr = \{x : \Sigma_{n \in \mathbf{N}} x_n < \infty\}$ (convergence en série) et la propriété $Pr = \{x : \lim_N N^{-1} \Sigma_{n=1}^N x_n = \mu\}$ (convergence en moyenne, où $\mu \in E$) sont asymptotiques pour x.

La notion s'étend aux suites (ou même à des **familles**) d'**événements aléatoires** (resp de **variables aléatoires**) (cf **tribu asymptotique**, **variable asymptotique**, **loi asymptotique**).