QUANTILE CONDITIONNEL (C5, D1)
(21 / 09 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

Comme l'**espérance mathématique conditionnelle**, le **quantile conditionnel** est une **caractéristique conditionnelle** importante utilisée pour caractériser une **loi multivariée** (eg une **loi multidimensionnelle**).

(i) Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un **espace probabilisé**, $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ un **espace probabilisable**, $(\xi, \eta) : \Omega \mapsto \mathcal{X} \times \mathbf{R}$ un **couple aléatoire** dont la **lp** est notée $P^{(\xi,\eta)} = (\xi, \eta)(P)$, $x \in \mathcal{X}$ et $p \in]0, 1[$.

On appelle **quantile conditionnel théorique**, ou **fractile conditionnel théorique**, **d'ordre p** de la va η relativement à (ou sachant) $\xi = x \in \mathcal{X}$ toute solution en $y \in \mathbf{R}$ du système d'inéquations :

$$(1) \quad \begin{cases} P([\eta \leq y] / [\xi = x]) \geq p, \\ P([\eta \geq y] / [\xi = x]) \geq 1 - p, \end{cases}$$

où P (B / A) désigne la **probabilité conditionnelle** d'un **événement** B pr à un événement A, avec ici $A = [\xi = x] = \{\omega \in \Omega : \xi(\omega) = x\}$ et $B = [\eta \leq y]$ ou $B = [\eta \geq y]$ (définitions classiques).

Si la **fr** de η conditionnelle à l'évènement A précédent, et notée $F(. / \xi = x)$, est strictement croissante, (1) conduit à :

$$(2) \quad P([\eta \leq y] / [\xi = x]) = F(y / \xi = x) = p \in]0, 1[.$$

Ce quantile conditionnel, solution de (1) ou de (2), est noté $Q_p(\eta / \xi = x)$ ou $Q_p^{\xi = x}\, \eta$. La correspondance $x \mapsto r_p(x) = Q_p(\eta / \xi = x)$ définit une **fonction numérique** $r_p : \mathcal{X} \mapsto \mathbf{R}$ qui est mesurable. Les définitions précédentes s'entendent presque partout pour la **mesure de LEBESGUE** λ définie sur $\mathcal{B}_{\mathbf{R}}$.

(ii) Par analogie avec l'espérance conditionnelle, on note $Q_p(\eta / \xi)$ ou $Q_p^{\xi}\, \eta$ l'application qui associe à toute va $\eta : \Omega \mapsto \mathbf{R}$ son quantile conditionnel relativement à une va donnée $\xi : \Omega \mapsto \mathcal{X}$.

(iii) En particulier, si ξ et η sont indépendantes, on en déduit que $F(y / \xi = x) = F^{\eta}(y)$, $\forall\, y \in \mathbf{R}$ (où F^{η} désigne la **fonction de répartition marginale**, ie la **fonction de répartition propre**, de η). Par sujite, $Q_p(\eta / \xi) = Q_p\, \eta$ (**quantile marginal** de η, ie **quantile marginal propre** à η).

(iv) Si $\mathscr{X}$ = $\mathbf{R}^K$, la fonction r_p précédente définit dans $\mathbf{R}^K$ x $\mathbf{R}$ une variété (hypersurface), dite **variété de régression quantilaire**, qui est à la base de la notion de **régression quantilaire**.

(v) En remplaçant ξ par une **fonction indicatrice** $\mathbf{1}_B$, avec B $\in \mathscr{B}$, on définit aussi une notion de quantile conditionnel relativement à un **événement aléatoire** B.