QUASI-DIFFÉRENTIATION (A16, J8)
(09 / 05 / 2020, © Monfort, Dicostat2005, 2005-2020)

La notion (opération) de **quasi-différentiation** généralise celle de **différence finie**. Elle est souvent utilisée dans l'étude d'un **modèle de régression** dynamique (cf eg **modèle dynamique**, **modèle d'interdépendance dynamique**, **transformation autorégressive**, **test de DURBIN-WATSON**).

(i) Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une **suite** réelle et $\alpha \in [0, 1]$.

On appelle **quasi-différentiation de paramètre** α entre u_n et u_{n-1} le nombre $\Delta_\alpha u_n$ défini selon :

(1) $\Delta_\alpha u_n = u_n - \alpha . u_{n-1} , \qquad \forall n \in \mathbf{N}^*.$

La suite $(\Delta_\alpha u_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ est dite **suite des quasi-différences** associée à la suite u.

En notant formellement $\Delta_\alpha u$ cette dernière suite, on appelle **quasi-différentiation** de paramètre α l'**opération** $\Delta_\alpha : u \mapsto \Delta_\alpha u$ qui associe à toute suite u la suite (unique) $\Delta_\alpha u$. Cette opération définit donc un **opérateur linéaire** dans l'espace $\mathbf{R}^\mathbf{N}$ des suites réelles. En particulier, lorsque $\alpha = 0$, on obtient l'identité de $\mathbf{R}^\mathbf{N}$; lorsque $\alpha = 1$, on obtient l'opération de **différentiation finie** Δ sur $\mathbf{R}^\mathbf{N}$.

(ii) L'opération (1) peut s'itérer :

$$
\begin{aligned}
& && \Delta_\alpha (\Delta_\alpha u_n), \\
(2) \quad & \Delta_\alpha^2 u_n = && (u_n - \alpha . u_{n-1}) - \alpha . (u_{n-1} - \alpha . u_{n-2}), \\
& && (u_n - 2\alpha . u_{n-1} + \alpha^2 . u_{n-2}),
\end{aligned}
$$

et conduit à la forme générale :

(3) $\Delta_\alpha^p u_n = \Delta_\alpha (\Delta_\alpha^{p-1} u_n) = \Sigma_{j=0}^p (-1)^j C_p^j \alpha^j u_{n-j}$.